Autor:

JORGE MANUEL MONTEIRO LOPES

ESTUDO DAS CURVAS EM R^3

- Uma introdução -

Licenciatura em Matemática

«Trabalho científico apresentado no ISE como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciatura em Matemática (ensino)»

Orientador: Dr. PAULINO LIMA FORTES

Trabalho Científico

ESTUDO DAS CURVAS EM R^3

- Uma introdução -

O júri

____

____

____

ISE Praia,........de.....................de 2006

AGRADECIMENTOS

Cordialmente, a minha imensa gratidão e reconhecimento:

- Ao Dr. PAULINO LIMA FORTES, pela orientação e disponibilidade mostrado para que este trabalho realizasse;

- Aos professores e colegas do ISE, pelo apoio prestado ao longo do curso;

- Finalmente, o meu reconhecimento e gratidão aos meus familiares mais próximos, pelo apoio decisivo em momentos difíceis na elaboração deste trabalho.

INDICE PÁG.

Introdução... 6

Capitulo I – Abordagem teórica das Curvas em R^3 8

1.1 Definição.. 8

1.2 Vector tangente, recta tangente e plano normal... 9

1.3 Comprimento do arco de uma curva...12

1.4 Curvas parametrizadas por comprimento de arco;
Reparametrização da curva por comprimento de arco...............................14

1.5 Campos de vectores ao longo de curvas... 21

1.6 Curvatura e torção; as fórmulas de Frenet... 23

Capitulo II – Aplicações..39

2.1 Exercícios resolvidos..39

2.2 Exercícios Propostos.. 50

Conclusão...... 52

Bibliografia....... 53

NOTAÇÕES
(Principais notações utilizadas)

Designa-se por:

- **I –** Intervalo de números reais;
- $\mathbf{C^k}$ – curva de classe k;
- **R** ou $\Re$ – conjunto dos números reais;
- $\mathbf{R^3}$ ou $\Re^3$ – espaço vectorial real dos vectores no espaço tridimensional;
- f (t) – vector posição ;
- $f\,'(t)$ ou $\dfrac{df}{dt}$ – primeira derivada da função vectorial f(t);
- $f\,''(t)$ ou $\dfrac{d^2 f}{dt^2}$ - segunda derivada da função vectorial f(t);
- $T(s) \bullet N(s)$ - Produto escalar de campos vectoriais ao longo de curvas;
- $T(s) \times N(s)$ - Produto vectorial de campos vectoriais ao longo de curvas;
- ▲ - Sinal que indica fim de uma demonstração.

Introdução

Todos nós temos uma ideia intuitiva de uma curva. Quando questionados para mencionar exemplos de curvas, podemos citar o exemplo da parábola, $y = x^2$, ou da circunferência, $x^2 + y^2 = 1$, ou ainda podemos pensar na imagem, por exemplo, de uma curva como o caminho que descreve um ponto em movimento ou nas figuras “desenhadas” com um único traço, sem retirar o lápis do papel, etc.

Mas, no contexto da Geometria Diferencial existe outro modo de definir curvas no espaço, como uma função de um intervalo $I \subset \Re$ para $\Re^3$ e a imagem da função designa-se por traço da curva.

Assim, podemos desenvolver um conjunto de conhecimentos básicos, que vão permitir aos estudantes, de certa forma, efectuar raciocínios indutivos e dedutivos, justificar afirmações simples, comparar e sistematizar conhecimentos adquiridos, realizar demonstrações elementares, etc. sobre curvas.

Sendo assim, a opção pelo tema «Estudo das Curvas em $\Re^3$» deve-se ao facto de nos parecer útil facultar tanto aos estudantes, num curso introdutório de Geometria Diferencial, como os do ISE, por exemplo, mais um material sistematizado de apoio nessa área tão importante, como aqueles que por uma razão ou outra desejem conhecer as técnicas básicas desta disciplina, no que tange ao estudo das curvas em $\Re^3$.

O primeiro capítulo tem um carácter fundamental de apresentar uma abordagem sobre curvas em $\Re^3$. Introduzimos este capítulo com algumas definições que consideremos pertinentes para a compreensão dos conteúdos a serem tratados, depois abordamos aspectos que têm a ver com vector tangente, recta tangente, plano normal, comprimento de arco de uma curva, parametrização da curva por comprimento de arco, reparametrização de uma curva por comprimento de arco, campos vectoriais e por fim curvatura, torção e equações de Frenet. Portanto, essas abordagens são feitas, exclusivamente, a partir das definições, teoremas e demonstrações.

O segundo (e último) capítulo tem um carácter essencial de apresentar um conjunto de exercícios resolvidos e propostos de dificuldade variável com intuito de apresentar sugestões metodológicas na aplicação dos conceitos, que abordamos no capítulo I, na resolução de exercícios e problemas sobre curvas em $\Re^3$.

Sendo assim, com este trabalho, pretendemos atingir os seguintes objectivos:

- Abordar os conceitos básicos da teoria de curvas em $\Re^3$;
- Aprofundar os conteúdos da Geometria Diferencial;
- Apresentar sugestões metodológicas para resolução de exercícios e problemas de curvas em $\Re^3$;
- Fornecer, ao leitor, um conjunto de conhecimentos a partir da teoria local de curvas em $\Re^3$.

Ao longo da realização do trabalho consultámos vasta bibliografia de autores ligados à investigação e ao ensino da Geometria Diferencial e tentámos seguir sempre a abordagem mais directa e simples, mantendo os pré-requisitos no mínimo possível. Para a materialização deste trabalho fizemos pesquisas nalguns sites de Internet, que são devidamente referenciados na parte bibliográfica.

CAPÍTULO I
Abordagem teórica das Curvas em R^3

1.1 Definição

Tendo em conta alguns conteúdos, que pretendemos abordar ao longo deste capítulo, então achamos por bem introduzir este capítulo com algumas definições que consideremos pertinentes para a melhor compreensão dos conteúdos a serem a tratados posteriormente. Daí segue-se as seguintes definições:

Definição 1. (função de classe k). Uma aplicação $f: I \rightarrow \Re^n$ diz-se uma função de classe k (C^k) quando existem as derivadas de f até a ordem k, contínuas no intervalo real I.

Usualmente C^0 significa continuidade, ou seja, se f é de classe C^0, é a mesma coisa dizer, que existe derivada de ordem 0 (que é a própria função).

Definição 2. (função vectorial) Chama-se função vectorial de variável real, a uma aplicação $f: I \rightarrow \Re^n$ no intervalo I real, em que, $f(t) = \left(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)\right)$.

Estas funções chamam-se funções vectoriais de variável real porque, de facto, associam a cada real $t \in I$ um vector $f(t)$ de $\Re^n$ (só nos interessa os casos n = 2 e n = 3).

Definição 3. (curva de classeC^r) Uma curva contínua no espaço $\Re^3$ é uma aplicação contínua $f: I \rightarrow \Re^3$, de classe C^r em $\Re^3$, definida num intervalo I real. A aplicação f, dada por $f(t) = \left(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\right)$ é contínua, se cada função coordenada $f_1, f_2, f_3 : I \to \Re$ for uma função contínua.

O conjunto imagem C da aplicação f, dado por $C = \{f(t) = \left(f_1(t), f_2(t), f_3(t), \ t \in I\right)\}$ é chamado de **traço** da curva de f. Observe que, com a definição 3, estamos a estudar todo o movimento da partícula e não apenas o conjunto C. Nesse caso, f é dita uma parametrização de C e denominamos t o parâmetro da curva f.

Definição 4. (curva regular). Uma curva $f : \Re \to \Re^3$ diz-se regular, se *f(t)* é de classe C^1 e $f'(t) \neq (0,0,0), \ \forall t \in I$.

Ainda é de frisar que, se $f'(t) = 0$, para algum $t \in I$, então nesses pontos a **curva não é regular** e consequentemente esses pontos são **chamados de pontos singulares.**

Exemplos:

1. A aplicação $f : \Re \to \Re^3$ definida por f(t) = (a cos t, a sen t, 0), a>0, é uma curva parametrizada regular, pois, existe $f'(t) = \left(-a\,sen\,t, \ a\cos t, \ 0\right)$ e é contínua e $\forall t \in \Re, \ f'(t) \neq (0,0,0)$.
2. A aplicação $f : \Re \to \Re^3$ dada por: $f(t) = \left(t, |\,t\,|, 2t^2\right)$, não é uma curva parametrizada regular. De facto, a função f_2, definida por $f_2(t) = |\,t\,|$, não é diferenciável em t = 0. Porém, a restrição de f, a qualquer intervalo que não contém o ponto t = 0, é uma curva parametrizada regular.

A partir de agora, exceptuando os casos devidamente assinalados, quando usarmos a palavra “ curva” estaremos a referir-nos a curvas parametrizadas regulares.

1.2 Vector tangente, recta tangente e plano normal

Definição 5. Seja $f : I \to \Re^3$ uma curva, dada por $f(t) = \left(f_1(t), \ f_2(t), \ f_3(t)\right)$ e $t \in I$. O vector tangente (ou vector velocidade) de f em $t \in I$ é dado por:

$$f'(t) = \left(f_1'(t),\ \ f_2'(t),\ \ f_3'(t)\right).$$

Quando estamos a imaginar uma curva como um ponto em movimento, interpretamos a derivada $f'(t)$ como sendo o vector velocidade da curva no instante t.

Para compreendermos a razão desta terminologia, notemos que o vector $\dfrac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$ é paralelo à corda com extremidades nos pontos $f(t)$ e $f(t+\Delta t)$ do traço da curva C de *f*, como mostra a figura 1.

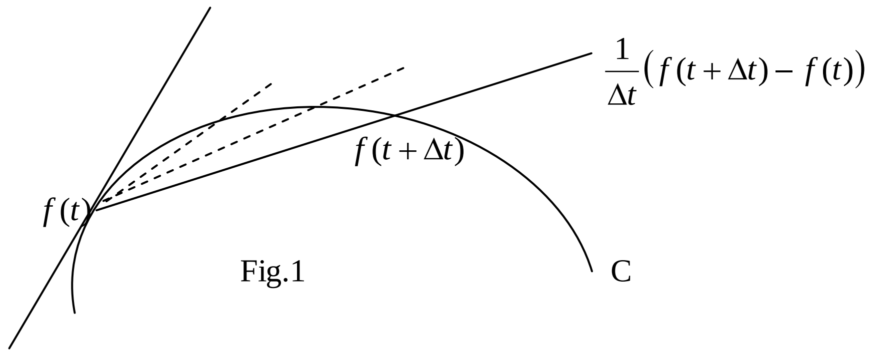


Fig.1

É claro que, à medida que Δt tende para zero, a corda se torna paralela à tangente a C em $f(t)$. Portanto, a tangente deverá ser paralela a $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} = f'(t)$.

Sendo assim, podemos ver que, o vector $f'(t)$ aponta na direcção da recta tangente à curva f no ponto $f(t)$, quando Δt tende para zero.

Agora, define-se a **velocidade escalar** *v(t)* (ou **celeridade** de f) no ponto $t \in I$, como sendo a norma do vector velocidade $f'(t)$, isto é,

$$v(t) = \|f'(t)\| = \sqrt{\left(f_1'(t)\right)^2 + \left(f_2'(t)\right)^2 + \left(f_3'(t)\right)^2}\ .$$

Teorema 1. Se o vector tangente a curva f é constante, o traço de f é uma recta.

Demonstração:

Suponhamos que $f'(t)$= c, para qualquer t, sendo c um vector constante. Então integrando componente a componente, obtemos

$\int f'(t)\,dt = \int c\,dt = ct + w$, onde w é um outro vector constante.

Logo, se $f'(t)$= c, então $f(t) = ct + w$.

▲

Como vimos anteriormente, se f for uma curva regular, o vector $f'(t)$ aponta para a direcção tangente à curva f no ponto $f(t)$. Sendo assim, segue-se a seguinte definição:

Definição 6. (**recta tangente**) Chama-se recta tangente à curva f no ponto $f(t)$ à recta determinada pelo ponto $f(t)$ e pelo vector tangente $f'(t)$.

Portanto, a equação da recta tangente é definida por:

$$r_t = f(t) + k.f'(t), \quad \text{onde } r_t \in \Re^3, k \in \Re$$

Agora, consideremos uma curva f definida em $\Re^3$ e seja $\vec{q} = f'(t)$ o vector tangente à curva no ponto $\vec{p} = f(t_0)$.

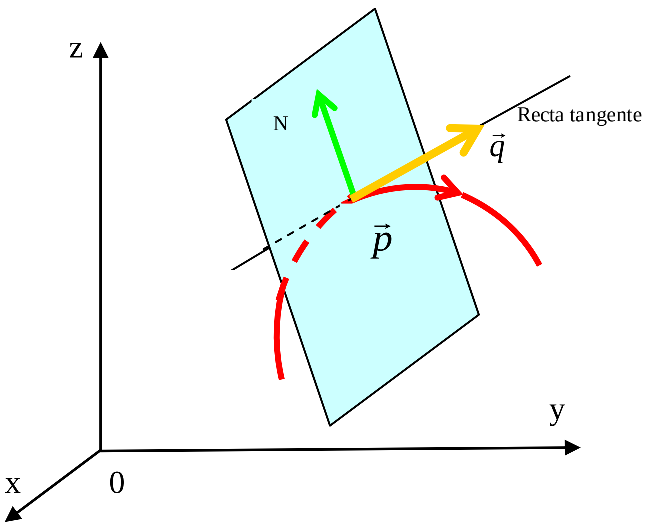


Fig. 2

Observando a fig. 2, podemos ver que qualquer recta do plano que passa pelo ponto $f(t_0)$ é perpendicular à recta tangente à curva nesse ponto.

Definição 7. (plano normal) Chama-se plano normal à uma curva num ponto $\vec{p}$, ao plano que passa por $\vec{p}$, ortogonal à recta tangente à curva nesse ponto. A equação do plano é tal que:

$$(\vec{r} - \vec{p}) \bullet \vec{q} = 0$$

onde $\vec{r} = (x, y, z)$ vector posição em qualquer ponto do plano, $\vec{p} = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ vector posição no ponto $t = t_0$ e $\vec{q} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ vector tangente à curva no ponto $\vec{p}$, como mostra a fig. 2.

Por exemplo, vamos escrever a equação da recta tangente e do plano normal à curva f no ponto A (2, 1, 3), sendo $f(t) = (2t,\ t^2,\ 3t)$.

Tendo em conta que x = 2t , y = t^2 e z = 3t então para x = 2, t = 1 e segundo a definição 6, a equação da recta tangente à curva no ponto t = 1, é definida pela expressão:

$$r_t = f(1) + k\,.f\,'(1),\ k \in \Re.$$

Então de $f(t) = (2t,\ t^2,\ 3t)$ temos que:

$$f(1) = (2,\ 1,\ 3), \quad f\,'(t) = (2,\ 2t,\ 3) \ \text{ e } \ f\,'(1) = (2,\ 2,\ 3).$$

Daí, a equação da recta tangente à curva f no ponto A é:

$$r_t = (2\ ,1\ ,3) + k(2\ ,\ 2\ ,\ 3), \quad k \in \Re.$$

A equação do plano normal é definida, como sendo,

$$(\vec{r} - f(1)) \bullet f\,'(1) = 0$$

$$\Leftrightarrow ((x,\ y,\ z) - (2, 1, 3)) \bullet (2,\ 2,\ 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2,\ y-1,\ z-3) \bullet (2,\ 2,\ 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 4 + 2y - 2 + 3z - 9 = 0$$

$\Leftrightarrow 2x + 2y + 3z - 15 = 0$, que é a equação do plano normal à curva de f no ponto A.

1.3 Comprimento de arco de uma curva

Um dos primeiros problemas que se coloca no estudo de uma curva é como definir o seu comprimento de arco.

O comprimento um arco de uma curva está definido em termos de aproximar os comprimentos da linha poligonal à curva, isto é, seja I = [a, b] e $f : \Re \to \Re^3$ uma curva C^0 e consideremos P ={t_0= a< t_1<....<t_n=b} uma partição de intervalo I. Ainda consideremos a linha poligonal que une, sucessivamente $f(t_0)$, $f(t_1)$, ...,$f(t_n)$ fig. 3.

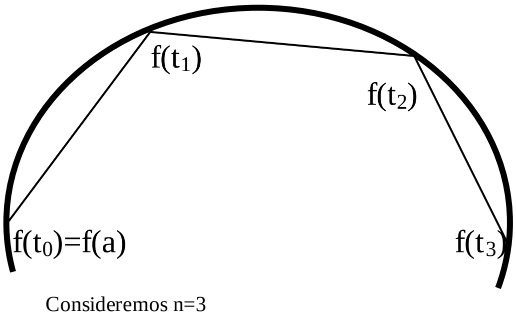


fig. 3

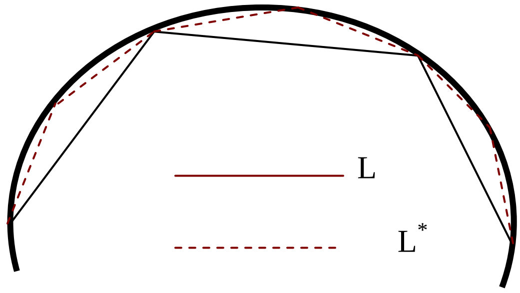


fig. 4

Se introduzimos mais pontos como mostra a fig. 4, podemos ver que, L^* aproxima melhor à curva e consequentemente, como o comprimento de um lado de polígono é menor ou igual à soma dos comprimentos dos outros lados, então segue-se que o comprimento de L é menor ou igual ao comprimento de L^*.

Portanto, quanto mais pontos tiver, mais a linha poligonal se aproxima à curva. Daí, como o comprimento da linha entre dois pontos adjacentes $f(t_{i-1})$ e $f(t_i)$ é $\|f(t_i)-f(t_{i-1})\|$ então o comprimento da linha poligonal (designado por C(P)) é:

$$C(P)=\sum_{i=1}^{n}\|f(t_i)-f(t_{i-1})\|.$$

Mas $\sum_{i=1}^{n}\|f(t_i)-f(t_{i-1})\|=\sum_{i=1}^{n}\left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(u)du\right\|$ e isto motiva a seguinte definição:

Definição 7. (comprimento do arco). Seja $f:[t_0\ ,\ t]\to\Re^3$ uma curva de classe C^1 e não necessariamente regular. O comprimento de arco da curva f, a partir de $f(t_0)$ é a função s definida por:

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}\|f'(u)\|\ du.$$

Por exemplo, para a espiral logarítmica definida por $f(t)=\left(e^t\cos t\ ,\ e^t sen\, t\ ,o\right)$ com $t\in[0\ ;\ +\infty[$, temos

$$f'(t)=\left(e^t\cos t-e^t sent;\ e^t\, sen\, t+e^t\cos t\ ;\ 0\right)$$

$$\Leftrightarrow\ f'(t)=\left(e^t(\cos t-sent);\ e^t(sen\, t+\cos t);\ 0\right)\quad \text{e}$$

$$\|f'(t)\|=\sqrt{\left(e^t(\cos t-sent)\right)^2+\left(e^t(sen\, t+\cos\, t)\right)^2}$$

$$= \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t - 2\cos t.sent + sen^2 t) + e^{2t}(sen^2 t + 2sent.\cos t + \cos^2 t)}$$

$$= \sqrt{e^{2t}(1 - 2\cos t.sent + 1 + 2sent.\cos t)}$$

$$= \sqrt{2e^{2t}}\,.$$

Logo, a função comprimento de arco de f a partir do ponto $f(0) = (0, 0, 0)$, por exemplo, é dado por $s(t) = \int_0^t \sqrt{2e^{2u}}\, du = \int_0^t \sqrt{2}.(e^{2u})^{\frac{1}{2}}\, du = \sqrt{2}\int_0^t e^u\, du = \sqrt{2}\left[e^u\right]_0^t = \sqrt{2}(e^t - 1)$.

1.4 Curvas parametrizadas por comprimento de arco. Reparametrização da curva por comprimento de arco

Tendo em conta a função comprimento de arco abordado na definição 7 e se pensamos em $f(t)$ como sendo a posição de um ponto móvel no instante t, então a derivada

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} \left\| f'(u) \right\| du = \left\| f'(t) \right\|$$ é a celeridade de f.

Definição 8. (curva parametrizada por comprimento de arco ou curva de celeridade unitária): Uma curva $f : I \to \Re^3$, está parametrizada por comprimento de arco se, para todo $t \in I$,

$$\left\| f'(t) \right\| = 1\,.$$

Segundo a definição 7, a função comprimento de arco de f, definida por $s : I \to \Re$ é

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left\| f'(u) \right\| du.$$ Se $\left\| f'(t) \right\| = 1$, para todo $t \in I$, então

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left\| f'(u) \right\| du = \int_{t_0}^{t} du = \left[u\right]_{t_0}^{t} = t - t_0\,.$$

Então, $s(t) = t - t_0 \Leftrightarrow t = t_0 + s(t)$. Assim, vê-se que t difere do comprimento $s(t)$ apenas pela constante t_0. Daí, a razão para a designação de parametrização por comprimento de arco.

Por exemplo, para a curva $f(t)=\left(\frac{5}{13}\cos t\ ,\ sen\,t\ ,\ -\frac{12}{13}\cos t\right)$ temos

$$f\,'(t)=\left(-\frac{5}{13}sen\,t\ ,\ \cos t\ ,\ \frac{12}{13}sen\,t\right) \text{ e}$$

$$\begin{aligned}\|f\,'(t)\| &= \sqrt{\left(-\frac{5}{13}sen\,t\right)^2+\cos^2 t+\left(\frac{12}{13}sen\,t\right)^2}\\ &= \sqrt{\frac{25}{169}sen^2 t+\cos^2 t+\frac{144}{169}sen^2 t}\\ &= \sqrt{sen^2 t+\cos^2 t}\\ &=1.\end{aligned}$$

Daí, como $\|f\,'(t)\|=1$ para todo $t\in I$, então podemos dizer que a curva f está parametrizada por comprimento de arco.

Teorema 2.: Em qualquer curva f parametrizada por comprimento da arco, $\left(f\,''(t)\bullet f\,'(t)\right)=0,\ \ \forall t\in\Re$.

Demonstração:

Como a curva está parametrizada por comprimento de arco, temos

$$1=\|f\,'(t)\|=\|f\,'(t)\|^2=\left(f\,'(t)\bullet f\,'(t)\right) \text{ para qualquer t.}$$

Por derivação relativamente a t obtemos que

$$\begin{aligned}&\left(f\,''(t)\bullet f\,'(t)\right)+\left(f\,'(t)\bullet f\,''(t)\right)=0\\ \Leftrightarrow\ & 2\left(f\,''(t)\bullet f\,'(t)\right)=0\\ \Leftrightarrow\ & \left(f\,''(t)\bullet f\,'(t)\right)=0.\end{aligned}$$

▲

Também, dada uma curva regular $f:I\to\Re^3$, é possível reparametrizá-la em uma curva $\beta:J\to\Re^3$ de modo que $\|\beta'\|=1$. Por exemplo, para circunferência $x^2+y^2=1$, obtivemos a parametrização $f(t)=(\cos t\ ,\ sen\,t)$. Outra parametrização é $v(t)=(sen\,t\ ,\ \cos t)$. Para vermos que v é uma reparametrização de *f*, temos que encontrar uma mudança de parâmetro λ, tal que $f(\lambda(t))=v(t)$, ou seja,

$$(\cos\lambda(t)\ ,\ sen\,\lambda(t))=(sen\,t\ ,\ \cos t). \text{ Daí segue-se a seguinte definição:}$$

Definição 9. (mudança de parâmetro): Chama-se mudança de parâmetro a uma bijecção $\lambda : J \to I$ (com $\lambda \neq 0$) entre intervalo que é da classe C^r, bem como a sua inversa λ^{-1}.

Definição 10. (reparametrização por comprimento de arco): Seja $f : I \to \Re^3$ uma curva e seja $\lambda : J \to I$ uma função real diferenciável. A função composta $\beta : J \to \Re^3$, tal que, $\beta(s) = (f \circ \lambda)(s)$ (sendo λ uma mudança de parâmetro) chama-se **reparametrização da curva f por comprimento de arco**.

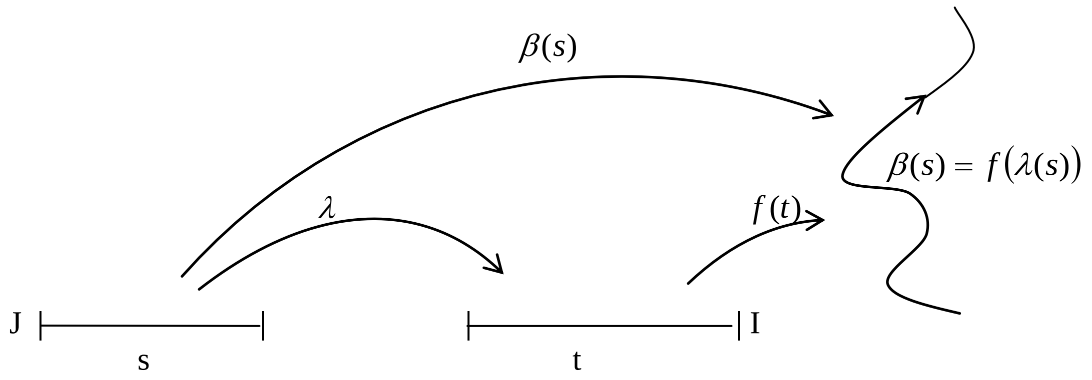


Fig. 5

De um modo geral, dizer que β é uma reparametrização de f, é o mesmo que dizer $\beta(t) = (f \circ \lambda)(t)$ e pela regra da cadeia temos que:

$\beta'(t) = (f \circ \lambda)'(t) = f'(\lambda(t))\lambda'(t)$. A celeridade de β (ou velocidade escalar de β) é dada por: $\|\beta'(t)\| = \|f'(\lambda(t))\lambda'(t)\| = \|f'(\lambda(t))\|.|\lambda'(t)|$.

É de realçar, que vamos considerar reparametrizações apenas onde a função λ é estritamente monótona e nesse caso $\lambda'(t) \neq 0$ e, portanto, se f for uma curva regular em I, sua reparametrização $\beta = f \circ \lambda$ também será regular em J.

Observações:

1. Como a inversa de qualquer mudança de parâmetro ainda é uma mudança de parâmetro, se $\beta = f \circ \lambda$ é uma reparametrização da curva *f*, também *f* é uma reparametrização de β.
2. Em qualquer mudança de parâmetro $\lambda : J \to I$, os intervalos I e J são do mesmo tipo (isto é, são simultaneamente abertos, fechados ou semiabertos). Se $\lambda : J \to \Re$ é contínua e injectiva então é estritamente crescente ou decrescente.

3. Uma bijecção $\lambda : J \to I$ é uma mudança de parâmetro, então $\lambda'(t) \neq 0,\ \forall t \in J$.

Portanto, o facto de λ' nunca se anula implica que $\lambda'(t) > 0,\ \forall t \in J$ ou $\lambda'(t) < 0,\ \forall t \in J$. Se $\lambda' > 0$ diz-se que a mudança de parâmetro preserva a orientação e se $\lambda' < 0$ diz-se que a mudança de parâmetro inverte a orientação.

Teorema 3.: Seja $\beta : [c\ ,\ d] \to \Re^3$ uma reparametrização da curva $f : [a\ ,b] \to \Re^3$. Então os comprimentos de f e β coincidem.

Demonstração:

Seja λ a mudança de parâmetro tal que $\beta = f \circ \lambda$. O comprimento de arco de β $(C(\beta))$ é igual a:

$$C(\beta) = \int_c^d \|\beta'(t)\|\, dt = \int_c^d \|(f \circ \lambda)'(t)\|\, dt = \int_c^d \|f'(\lambda(t))\lambda'(t)\|\, dt = \int_c^d \|f'(\lambda(t))\|.|\lambda'(t)|\, dt\,.$$

Se $\lambda'(t) > 0,$ para qualquer t, temos $C(\beta) = \int_c^d \|f'(\lambda(t))\|.\lambda'(t)\, dt$ e fazendo a mudança de variável $u = \lambda(t)$ *então* $du = \lambda'(t)dt$. Daí

$$C(\beta) = \int_{\lambda(c)=a}^{\lambda(d)=b} \|f'(u)\|\, du = \int_a^b \|f'(u)\|\, du = C(f)\,.$$

Se $\lambda'(t) < 0,$ para qualquer t, temos $C(\beta) = -\int_c^d \|f'(\lambda(t))\|.\lambda'(t)\, dt$ e fazendo a mudança de variável, temos que

$$C(\beta) = \int_{\lambda(c)=b}^{\lambda(d)=a} \|f'(u)\|\, du = -\int_b^a \|f'(u)\|\, du = \int_a^b \|f'(u)\|\, du = C(f)\,.$$

▲

Portanto, é importante conhecer que curvas admitem reparametrizações por comprimento de arco, porque o estudo de uma curva simplifica-se quando ela tenha celeridade unitária (dito de outro modo, quando ela está parametrizada por comprimento de arco). Daí segue-se o seguinte teorema.

Teorema 4. Se f for uma curva regular em $\Re^3$, então existe uma reparametrização β de f, tal que, β tenha celeridade unitária.

Demonstração: Seja $f: I \to \Re^3$, uma curva regular. Então, $\forall t \in I, f'(t) \neq 0$. Então, podemos definir uma função comprimento de arco, como sendo,

$s(t) = \int_{t_0}^{t} \| f'(u) \| du$. Mas, s é uma função diferenciável. Daí,

$$s'(t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^{t} \| f'(u) \| du = \| f'(t) \|.$$

Como f é regular, então $s'(t) = \| f'(t) \| > 0$ e consequentemente s é crescente e injectiva. Daí, pelo teorema da função inversa, a função $s(t)$ possui uma inversa $t(s)$ cuja derivada $\frac{d\,t(s)}{ds}$ no ponto $s = s(t)$ é a inversa da derivada $\frac{d\,s(t)}{dt}$ no ponto $t = t(s)$.

Sendo assim, visto que $t(s) = s^{-1}(t)$, então

$$t'(s) = \frac{1}{s'(t(s))} = \frac{1}{\| f'(t(s)) \|}.$$

Mas, afirma-se que $\| \beta'(s) \| = 1$. Sendo assim, temos que:

$$\beta(s) = f(t) \circ t(s) = f(t(s)) \quad \text{e}$$

$$\beta'(s) = f'(t(s)).t'(s) = f'(t(s)) . \frac{1}{\| f'(t(s)) \|}.$$

Logo,

$$\| \beta'(s) \| = \left\| f'(t(s)) . \frac{1}{\| f'(t(s)) \|} \right\| = \| f'(t(s)) \| . \frac{1}{\| f'(t(s)) \|} = 1.$$

Portanto, $\beta(s) = f(t) \circ s^{-1}(t)$ é uma reparametrização de f de celeridade unitária.

▲

Agora, vamos mostrar como reparametrizar uma curva regular, de modo que tenha celeridade unitária.

Segundo a definição 10, para reparametrizar uma curva f por comprimento de arco, temos que encontrar uma mudança de parâmetro λ, tal que, $\beta(s) = f(\lambda(s))$.

Sendo assim, primeiramente vamos definir $s(t)$ como sendo a função comprimento de arco da curva f, no intervalo $[t_0\ ,\ t] \subset I \to \Re$, isto é,

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \| f'(u) \|\ du.$$

De seguida, vamos mostrar que **s** é uma mudança de parâmetro, bem como a sua inversa.

Então, como a curva f é regular, vimos que $s'(t) = \|f'(t)\| > 0$, em I. Como consequência, $s(t)$ é estritamente crescente em I e portanto a função $s: I \to s(I)$ é bijectiva (é injectiva e sobrejectiva simultaneamente). Daí, $s(t)$ admite uma inversa, que vamos chamar de $t(s)$. Logo, podemos concluir que s é uma mudança de parâmetro, bem como a sua inversa $t(s)$ e é esta função inversa que fornece-nos a reparametrização da curva f, de celeridade unitária.

Por exemplo, vejamos se a curva de hélice $f(t) = (a\cos t\ ,\ a\,sent\ ,\ bt)$ (com a> 0 e b$\neq$ 0) está parametrizada por comprimento de arco e, caso contrário, vamos reparametrizá-la por comprimento de arco. Sendo assim, vejamos:

$$f(t) = (a\cos t\ ,\ a\,sent\ ,\ bt) \quad \text{e}$$

$$f'(t) = (-a\,sent\ ,\ a\cos t\ ,\ b) \quad \text{e}$$

$$\|f'(t)\| = \sqrt{a^2 sen^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}\ .$$

Como $\|f'(t)\| = c = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 1$, então curva de hélice não está parametrizada por comprimento de arco.

Vamos reparametrizar esta curva por comprimento de arco, medindo o comprimento de arco a partir de $t_0 = 0$, ou seja,

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|f'(u)\|\, du = \int_0^t c\, du = ct\text{, (com } s : \Re \longrightarrow \Re\text{)}$$

Agora, será $s(t) = ct$ uma mudança de parâmetro? Pois s(t) será uma mudança de parâmetro bem como a sua inversa se ***s*** é bijectiva e $s'(t) \neq 0$. Mas, a função ***s*** é bijectiva sse ela é injectiva e sobrejectiva simultaneamente. Sendo assim, vejamos:

- s é injectiva $\Leftrightarrow \forall t_1, t_2 \in D_s : s(t_1) = s(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$

$s(t_1) = s(t_2) \Leftrightarrow c\, t_1 = c\, t_2 \Rightarrow t_1 = t_2$, logo s é injectiva.

- $s: \Re \to \Re$ é sobrejectiva $\Leftrightarrow \forall y \in \Re,\ \exists t \in \Re : y = s(t)$

$s(t) = y \Leftrightarrow c\,t = y \Leftrightarrow t = \dfrac{y}{c}$ $(y \in \Re)$. Daí, para cada número real y existe um $t = \dfrac{y}{c}$. Logo s é sobrejectiva, daí, a função s é uma bijecção de classe C^r.

Como a função s é bijectiva e $s'(t) = c \neq 0,$ então s é uma mudança de parâmetro, bem como a sua inversa, uma vez que $s^{-1} = t(s)$ é bijectiva (porque s é bijectiva).

Sendo assim, vimos que $s(t) = ct$, então $t(s) = \dfrac{s}{c}$. Daí, a composição $(f \circ t)(s)$ é a reparametrização β de f de celeridade unitária. Assim, temos que:

$$\begin{aligned}\beta(s) &= f(t(s)) \\ &= f\left(\frac{s}{c}\right) \\ &= \left(a\cos\frac{s}{c},\ \ a\,sen\frac{s}{c},\ \ \frac{bs}{c}\right)\end{aligned}$$

que é a reparametrização da curva de f por comprimento de arco procurada.

É fácil verificar que $\|\beta'(s)\| = 1$, para qualquer valor de s, comprovando assim, que β está parametrizada por comprimento de arco.

É de realçar que, qualquer curva regular possui uma reparametrização por comprimento de arco. No entanto, às vezes, pode ser muito complicado, ou mesmo impossível, determinar explicitamente essa reparametrização, uma vez que, poderemos encontrar ou deparar com dois tipos de obstáculos.

- Em primeiro lugar, pode não ser possível exprimir o integral $s(t) = \int_{t_0}^{t} \|f'(u)\|du$.

  Por exemplo, vamos considerar a curva dada por $f(t) = (t\ ;\ t^2 ; t^3)$, com $t \in \Re$. Temos $f'(t) = (1\ ;\ 2t\ ;\ 3t^2)$, $\|f'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$ e como $f'(t)$ nunca se anula, (pois f é regular) então o comprimento de arco da curva f, a partir de *f(0) = (0,0,0)* é

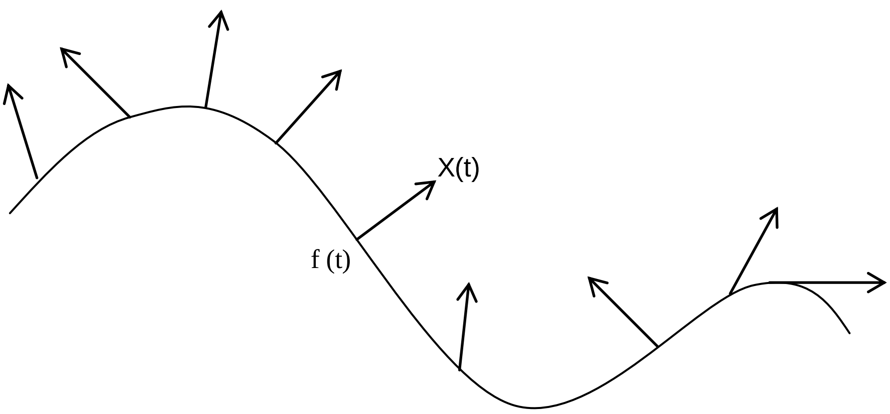
$$s(t) = \int_0^t \|f'(u)\|du = \int_0^t \sqrt{1 + 4u^2 + 9u^4}\ du\,.$$

Portanto, podemos constatar que este integral não possui primitiva imediata.

- O segundo obstáculo, mesmo que se consiga determinar s(t), poderá não ser possível encontrar a função inversa $s^{-1} : s(I) \to I$. Esse é o caso, por exemplo, da curva dada por $f(t) = \left(t \ ; \ \dfrac{t^2}{2} \right)$. Com efeito, $f'(t) = (1 \ ; \ t)$ e $s(t) = \int_0^t \sqrt{1+u^2}du = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+t^2} + \ln(t + \sqrt{1+t^2})\right)$, que é difícil ou impossível determinar a sua função inversa.

1.5 Campo de vectores ao longo de curvas

Definição 11.: Um campo de vectores X(t) ao longo de uma curva $f : I \to \Re^3$ é uma aplicação $X : I \to \Re^3$ de classe C^r, que atribui a cada ponto $t \in I$ de $\Re^3$, um vector com origem no ponto *f(t)*.



Campo de vectores X(t) ao longo de *f*

fig. 6

Para determinar X(t), basta conhecer a extremidade final do vector X(t), uma vez que sua extremidade inicial é *f(t)*.

Segundo a definição 5, podemos constatar que em cada ponto da curva temos um vector tangente à curva. Ao conjunto dos vectores tangentes (vectores velocidades) à curva f, em cada ponto *f(t)* de $\Re^3$, forma um campo vectorial tangente à curva.

Dados dois campos $X(t)$ e $Y(t)$ de classe C^r ao longo da curva f e uma aplicação $g : I \to \Re$ de classe C^r, então podemos definir os campos X(t) + Y(t) e g X(t) por:

(X + Y)(t) = X(t) + Y(t), (g X)(t) = g(t) X(t), que serão também campos de classe C^r ao longo da curva de f.

Se $X(t)$ é um campo vectorial em $\Re^3$, então para cada $t \in I$ de $\Re^3$, podemos escrever X(t) = (X_1(t) ,X_2(t), X_3(t)), como sendo,

$$X(t) = \sum_{i=1}^{3} X_i(t) U_i(t)$$

onde U_i (t) é um campo referencial natural.

Ainda, considerando $X(t) = (X_1(t),\ X_2(t),\ X_3(t))$ como sendo, um campo vectorial de $\Re^3$, então para cada $t \in I$ de $\Re^3$, podemos definir a derivada de X por:

$$X'(t) = (X'_1(t),\ X'_2(t),\ X'_3(t))$$

obtendo assim, um novo campo vectorial de classe C^{r-1}. Sendo assim, as seguintes relações são facilmente verificadas:

- $(X+Y)'(t) = X'(t) + Y'(t)$,
- $(g\,X)'(t) = g'(t)X(t) + g(t)X'(t)$,
- $(X \bullet Y)'(t) = X'(t) \bullet Y(t) + X(t) \bullet Y'(t)$.

Assim, temos o seguinte teorema :

Teorema 5. Sejam $X(t)$ e $Y(t)$ dois campos vectoriais de classe C^r. Se $\|X(t)\|$ é constante, então $X'(t)$ é perpendicular a $X(t)$, para todo $t \in I$, isto é,

$$X(t) \bullet X'(t) = 0. \qquad (1)$$

Se $X(t)$ e Y(t) são perpendiculares para todo $t \in I$, então

$$X'(t) \bullet Y(t) = -X(t) \bullet Y'(t). \qquad (2)$$

Demonstração

Segundo a hipótese, $\|X(t)\|$ = C. Então,

C $= \|X(t)\|$ = $\|X(t)\|^2 = (X(t) \bullet X(t))$, para qualquer t. Então, $(X(t) \bullet X(t))$=C e derivando esta equação, obtemos que:

$$X'(t) \bullet X(t) + X(t) \bullet X'(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(X(t) \bullet X'(t)) = 0$$

$\Leftrightarrow X(t) \bullet X'(t) = 0$, o que prova a primeira parte.

Para demonstrar a segunda parte, sabemos que, se X(t) e Y(t) são perpendiculares, então: $X(t) \bullet Y(t) = 0$. Derivando esta equação, obtemos que:

$$X'(t) \bullet Y(t) + X(t) \bullet Y'(t) = 0$$

$\Leftrightarrow X'(t) \bullet Y(t) = -X(t) \bullet Y'(t)$, o que prova a segunda parte. Daí, podemos concluir que os campos de vectores X(t) e Y(t) são perpendiculares.

▲

1.6 Curvatura e torção; as fórmulas (equações) de Frenet

Vamos trabalhar nesta secção, mais com curvas de celeridade unitária (curvas parametrizadas por comprimento de arco).

Seja $f : I \to \Re^3$, uma curva parametrizada por comprimento de arco, tal que $\|f'(s)\| = 1$, para todo $s \in I$. Desta forma, está bem definido um campo T de vectores tangentes e unitários ao longo da curva de f e que é dado por:

$$T(s) = f'(s).$$

Definição 12. Seja $f : I \to \Re^3$, uma curva parametrizada por comprimento de arco, tal que, $f''(s) \neq 0$, para todo $s \in I$. Assim, definimos três campos de vectores ortogonais ao longo da curva de f. O primeiro é o campo tangente e é definido por $T(s) = f'(s)$. O segundo é o campo normal definido por $N(s) = \dfrac{f''(s)}{\|f''(s)\|}$ ou $\left(N(s) = \dfrac{T'(s)}{\|T'(s)\|} \right)$. O terceiro é o campo binormal definido por $B(s) = T(s) \times N(s)$

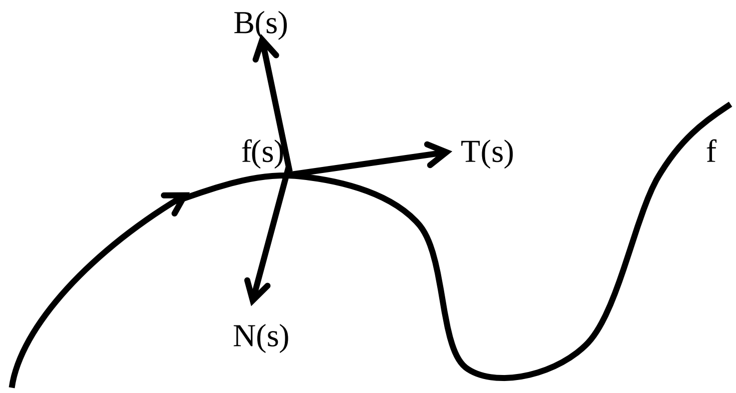


Fig.7

Como $\|T(s)\| = 1$, então segundo o teorema 5, $T'(s)$ é perpendicular a $T(s)$. O campo vectorial $T'(s) = f''(s)$ designa-se por campo curvatura de f. O comprimento do campo curvatura $T'(s)$ fornece-nos uma medida numérica da viragem da curva de f.

Definição 13. A função de valor real $k(s) = \|f''(s)\| = \|T'(s)\|$, com $s \in I$, é chamada de curvatura de f. O raio de curvatura ρ de f é o inverso da curvatura, ou seja, $\rho = \dfrac{1}{k(s)}$.

Com a nossa hipótese $f''(s) \neq 0$, então temos que $k(s) > 0$, para todo $s \in I$. Tendo em conta o teorema 1, se $f''(s) = 0$ para cada s, então o traço de f é uma linha recta e consequentemente a curvatura é zero.

Teorema 6. Seja $f : I \to \Re^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco. A curvatura de f é igual a zero, se e somente se o traço de f está contida numa recta.

Demonstração:

Queremos provar que $f(I)$ está contido numa recta. Então, suponhamos que $k(s) = 0$. Como $T(s)$ está definida num intervalo de I, concluímos que $T(s) =$ V, $\left(V \in \Re^3\right)$ e é um vector constante e integrando $T(s)$ obtemos que:

$$f(s) = V s + w, \qquad \text{sendo } V \text{ e } w \in \Re^3.$$

Portanto, o traço de f está contido na recta que passa por w e é paralelo ao vector V.

Reciprocamente, se o traço de f esta contido numa recta que passa pelo ponto $P \in \Re^3$, com a direcção do vector V, então

$$f(s) = V s + P.$$

Sendo assim, $T(s) = f'(s) = V$ e portanto $T'(s) = (0,\ 0,\ 0)$ e como $k(s) = \|T'(s)\|$, então concluímos que $k(s) = 0$, para todo $s \in I$.

▲

Em suma, a curvatura mede quanto é que a curva se afasta de estar contida numa recta.

Agora, no caso geral[1], como devemos definir (e calcular) a curvatura de f? Se f é uma curva regular, sabemos que existe, segundo teorema 4, uma reparametrização β de f por

---

[1] Refere-se a curvas regulares arbitrárias

comprimento de arco. Então, vamos definir a curvatura de f como sendo a curvatura da reparametrização β de *f*. Portanto,

$$k_f(t) = k_\beta(s(t))$$

sendo s a mudança de parâmetro.

Mas, como nem sempre é possível determinar explicitamente a reparametrização β, então necessitamos de uma fórmula para calcular a curvatura em termos de f e t. Daí, segue-se o seguinte teorema:

Teorema 7. Seja $f : I \to \Re^3$ uma curva regular de classe ≥ 2. Então, para cada $t \in I$,

$$k(t) = \frac{\| f'(t) \times f''(t) \|}{\| f'(t) \|^3}.$$

Demonstração: Dada a curva f, definida por $f = f(t)$, regular de classe ≥ 2. Então, considerando s como sendo a função comprimento de arco e segundo o teorema 4 temos que $f(t) = \beta(s(t))$. Sendo assim,

$$f'(t) = \beta'(s(t))s'(t) = T_\beta(s(t))s'(t) \text{ e}$$
$$f''(t) = T'_\beta(s(t)).s'(t).s'(t) + T_\beta(s(t)).s''(t) = T'_\beta(s(t)).s'(t)^2 + T_\beta(s(t)).s''(t)$$

Agora,

$$\begin{aligned} f'(t) \times f''(t) &= T_\beta(s(t))s'(t) \times \left(T'_\beta(s(t)).s'(t)^2 + T_\beta(s(t)).s''(t)\right) \\ &= T_\beta(s(t))s'(t) \times T'_\beta(s(t)).s'(t)^2 + T_\beta(s(t))s'(t) \times T_\beta(s(t)).s''(t) \\ &= (s'(t))^3.\ T_\beta(s(t)) \times T'_\beta(s(t)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \| f'(t) \times f''(t) \| &= \left\| (s'(t))^3 . T_\beta(s(t)) \times T'_\beta(s(t)) \right\| \\ &= \| f'(t) \|^3 \left\| T_\beta(s(t)) \times T'_\beta(s(t)) \right\| \\ &= \| f'(t) \|^3 . \| T_\beta(s(t)) \| \, \| T'_\beta(s(t)) \| \, sen\left(T_\beta(s(t)) \wedge T'_\beta(s(t))\right). \end{aligned}$$

Mas, segundo o teorema 5., $T_\beta(s(t)) \perp T'_\beta(s(t))$ e como em qualquer ponto de $f(t) = \beta(s(t))$ os números $k_f(t)$ e $k_\beta(s(t))$ são iguais, então $\| T'_\beta(s(t)) \| = k_\beta(s(t)) = k_f(t)$ [2]. Daí,

$$\| f'(t) \times f''(t) \| = \| f'(t) \|^3 . k(t), \text{ pelo que}$$

[2] Consideremos que $k_f(t) = k(t)$

$$k(t)=\frac{\| f'(t)\times f''(t)\|}{\| f'(t)\|^3}$$

▲

Por exemplo, consideremos a hélice circular, definida por:

$f(t)=(a\cos t\ ,\ a\,sen\,t\ ,\ bt)$ com $a>0$ e $b\neq 0$.

Vimos no exemplo da pág. 19, que a reparametrização β de f por comprimento de arco é: $\beta(s)=\left(a\cos\frac{s}{c},\ a\,sen\frac{s}{c},\ \frac{bs}{c}\right)$, sendo $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

Como $\beta'(s)=\left(-\frac{a}{c}\ sen\frac{s}{c},\ \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c},\ \frac{b}{c}\right)$ e

$\beta''(s)=\left(-\frac{a}{c^2}\ \cos\frac{s}{c},\ \frac{a}{c^2}sen\frac{s}{c},\ 0\right)$. Então, segundo a definição 13. obtemos que:

$$k(s)=\|\beta''(s)\|=\sqrt{\left(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c}\right)^2+\left(-\frac{a}{c^2}\ sen\frac{s}{c}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2}{c^4}\left(\cos\frac{s}{c}\right)^2+\left(sen\frac{s}{c}\right)^2}=\frac{a}{c^2}=\frac{a}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}=\frac{a}{a^2+b^2}.$$

Portanto, a curvatura da hélice circular f (t*)* é constante e diminui com o crescimento em valor de a ou b.

Alternativamente, podíamos ter calculado a curvatura de *f(t)*, usando a fórmula do teorema 7, evitando, assim, a determinação da reparametrização por comprimento de arco β de f. Sendo assim,

$f'(t)=(-a\,sen\,t\ ,\ a\cos t\ ,\ b\ )$,

$f''(t)=(-a\ \cos\ t\ ,\ -a\ sen\ t\ ,\ 0)$ e

$$f'(t)\times f''(t)=\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3\\ -a\,sent & a\cos t & b\\ -a\cos t & -a\,sent & 0\end{vmatrix}=$$

$$=U_1\begin{vmatrix} a\cos t & b\\ -a\,sent & 0\end{vmatrix}-U_2\begin{vmatrix} -a\,sent & b\\ -a\cos t & 0\end{vmatrix}+U_3\begin{vmatrix} -a\,sent & a\cos t\\ -a\cos t & -asent\end{vmatrix}$$

$=(ab(sent)\ ,\ -ab(\cos t)\ ,\ a^2)$ e consequentemente,

$$\|f'(t)\times f''(t)\| = \sqrt{a^2b^2sen^2t + a^2b^2\cos^2 t + a^4}$$
$$= \sqrt{a^2b^2(sen^2t + \cos^2 t) + a^4}$$
$$= \sqrt{a^2(b^2 + a^2)}$$
$$= a\sqrt{a^2 + b^2}$$

Como

$\| f'(t)\| = \sqrt{(-asent)^2 + (a\cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$, então temos que:

$$k(t) = \frac{\| f'(t)\times f''(t)\|}{\| f'(t)\|^3} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^3} = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Portanto, a partir deste exemplo, podemos ver que no caso limite $b = 0$ (com $a \neq 0$), a hélice circular é simplesmente uma circunferência no plano horizontal XOY, de raio a, pelo que a sua curvatura é $\frac{1}{a}$. No caso limite $a = 0$ (com $b \neq 0$), o traço da hélice é uma linha recta, pelo que a sua curvatura é zero. Sendo assim, este exemplo nos mostra que a curvatura não é suficiente para identificar completamente a forma de uma curva (com excepção as curvas planas). Por isso, vamos introduzir outro tipo de curvatura para curvas não planas, chamada torção, que mede quanto é que a curva se afasta de estar contida num plano(pois curvas planas têm torção zero).

Mas, primeiramente vimos na definição 12, que numa curva $f : I \to \Re^3$ parametrizada por comprimento de arco, com $f''(s) \neq 0$, podemos definir um conjunto de vectores ortogonal ao longo da curva *f*. Daí, segue-se o seguinte teorema:

Teorema 8. Seja $f : I \to \Re^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco, com $k(s)$>0. Então, os três campos vectoriais T(s), N(s), B(s) de f são campos vectoriais unitários, mutuamente ortogonais em cada ponto de $\Re^3$.

Demonstração: Por definição 12, $\|T(s)\| = 1$. Vimos que $N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|}$ e como $k(s) = \|T'(s)\| > 0$, então temos que:

$$\|N(s)\| = \frac{1}{\|T'(s)\|}\|T'(s)\| = 1.$$

Portanto, segundo o teorema 5., vê-se que T(s) e N(s) são ortogonais, ou seja, $T(s)\bullet N(s)=0$, pois, $T(s)\bullet T(s)=1$ e derivando essa igualdade temos que $2T'(s)\bullet T(s)=0$ e como $N(s)=\dfrac{T'(s)}{k(s)}$ então $T'(s)=k(s)N(s)$. Daí,

$T'(s)\bullet T(s)=0 \Leftrightarrow k(s)N(s)\bullet T(s)=0 \Leftrightarrow N(s)\bullet T(s)=0$. Logo, os vectores T(s) e N(s) são ortogonais.

Agora, vamos mostrar que $\|B(s)\|=1$ e que B(s) é ortogonal tanto a T(s) como a N(s).

Vimos que, $B(s)=T(s)\times N(s)$ e $\|B(s)\|=\|T(s)\|\,\|N(s)\|\,sen\,(T(s)\ \wedge\ N(s))$. Logo,

$$\|B(s)\|=1.$$

Agora, se $N(s)\bullet B(s)=0$ então N(s) e B(s) são ortogonais. Sendo assim, vejamos:

$$N(s)\bullet B(s)=N(s)\bullet(T(s)\times N(s))=$$

$$=\begin{vmatrix} N_1(s) & N_2(s) & N_3(s) \\ T_1(s) & N_2(s) & N_3(s) \\ N_1(s) & N_2(s) & N_3(s) \end{vmatrix}=0$$

Daí, podemos concluir que os vectores N(s) e B(s) são ortogonais, pois $N(s)\bullet B(s)=0$.

De forma semelhante temos que $T(s)\bullet B(s)=T(s)\bullet(T(s)\times N(s))=0$. Portanto, os três campos vectoriais $\{T(s),\ N(s),\ B(s)\}$ são ortonormada em $\Re^3$.

▲

Definição14. Seja $f: I\rightarrow\Re^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco, com $k(s)>0$. O referencial $\{T(s),\ N(s),\ B(s)\}$ é chamado campo referencial de Frenet de f.

A chave de um estudo bem sucedido de uma curva é usar o campo referencial de Frenet, sempre que possível porque o referencial de Frenet ajuda-nos a resolver muitos problemas sobre curvas, principalmente, quando estamos a exprimir as derivadas[3] $T'(s),\ N'(s),\ B'(s)$ em termos de $T(s),\ N(s),\ B(s)$.

Sendo assim, dado por exemplo, um campo V(s) ao longo de uma curva f (s), então podemos escrevê-lo através da expansão ortogonal de $T(s),\ N(s)\ e\ B(s)$, como sendo

$$V(s)=a(s)T(s)+b(s)N(s)+c(s)B(s),$$

onde $a(s)=V(s)\bullet T(s)$, $b(s)=V(s)\bullet N(s)$ e $c(s)=V(s)\bullet B(s)$.

[3] Vamos assumir que todas as funções e campos são deriváveis até a ordem que nos interessa.

Podemos derivar o campo $T(s) = f'(s)$ e obter $T'(s) = f''(s) = k(s)N(s)$, pela definição de N(s).

Também, podemos derivar $B(s)$ e obter $B'(s) = -\tau(s)N(s)$ que é um múltiplo escalar de N(s). Mas, para provar esta definição, vamos usar a expansão ortogonal para exprimir $B'(s)$ em termos de $T(s), N(s), B(s)$. Sendo assim, temos:

$$B'(s) = (B'(s) \bullet T(s))T(s) + (B'(s) \bullet N(s))N(s) + (B'(s) \bullet B(s))B(s).$$

Vamos provar que $B'(s) \bullet T(s) = 0$ e $B'(s) \bullet B(s) = 0$. Para provar a primeira, sabemos que $B(s) \bullet T(s) = 0$ e por derivação segue-se que $B'(s) \bullet T(s) + B(s) \bullet T'(s) = 0$ e como $T'(s) = k(s)N(s)$ então, $B'(s) \bullet T(s) + B(s) \bullet k(s)N(s) = 0$. Daí, $B'(s) \bullet T(s) = 0$.

No que tange a segunda expressão, sabemos que $\|B(s)\| = 1$ e por teorema 5, podemos concluir $B'(s) \bullet B(s) = 0$.

Sendo assim, só resta ao campo $B'(s)$ ser um múltiplo de N(s), pelo que, podemos escrever $B'(s) = (B'(s) \bullet N(s))N(s)$ ou seja,

$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

onde o escalar $\tau(s)$ chamamos de torção da curva *f* no ponto *f(s)*.

Definição 15. Seja $f : I \to \Re^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco. Chama-se torção de *f,* a uma aplicação $\tau : I \to \Re$ definida por

$$\tau(s) = -B'(s) \bullet N(s)$$

É de realçar que, a torção só está definida no caso em que a curvatura é diferente de zero e ao contrário da curvatura, torção pode assumir valores negativos.

Como no caso da curvatura, definimos a torção de uma curva regular arbitrária *f,* como sendo a torção de uma reparametrização por comprimento de arco β de *f.* Portanto,

$$\tau_f(t) = \tau_\beta(s(t)),$$

sendo s a mudança de parâmetro.

Mas, tal como fizemos para a curvatura, é possível determinar uma fórmula para calcular a torção, unicamente em termos de f e t, sem requerer ao conhecimento de uma reparametrização por comprimento de arco. Daí, segue-se o seguinte teorema:

Teorema 9. Seja f uma curva regular em $\Re^3$ cuja curvatura nunca se anula. Então,

$$\tau(t) = \frac{\left(f'(t) \times f''(t)\right) \bullet f'''(t)}{\left\| f'(t) \times f''(t) \right\|^2}$$

Demonstração: Consideremos $f\,(t)$ uma curva regular em $\Re^3$ e segundo o teorema 4 podemos escrever que $f(t) = \beta(s(t))$, sendo s a função comprimento de arco. Então, vimos na demonstração do teorema 7 que:

$$f'(t) = \beta'(s(t))s'(t) = T_\beta(s(t))s'(t),$$
$$f''(t) = T'_\beta(s(t)).s'(t)^2 + T_\beta(s(t)).s''(t),$$
$$f'(t) \times f''(t) = \|f'(t)\|^3 \,.T_\beta(s(t)) \times T'_\beta(s(t))$$

e que,

$$\|f'(t) \times f''(t)\| = \|f'(t)\|^3.k(t) \quad \text{donde tira-se que} \quad \|f'(t) \times f''(t)\|^2 = \|f'(t)\|^6.k^2(t).$$

Agora, como

$$f''(t) = T'_\beta(s(t)).s'(t)^2 + T_\beta(s(t)).s''(t) \quad \text{então,}$$

$$f'''(t) = T''_\beta(s(t))s'(t)(s'(t))^2 + T'_\beta(s(t)).2s'(t)s''(t) + T'_\beta(s(t))s'(t)s''(t) + T_\beta(s(t))s'''(t)$$
$$= T''_\beta(s(t))(s'(t))^3 + 3T'_\beta(s(t))s'(t)s''(t) + T_\beta(s(t))s'''(t).$$

Mas, considerando β como sendo uma curva parametrizada por comprimento de arco e atendendo a definição 12., temos que:

$N(s) = \dfrac{T'(s)}{k(s)}$ então $T'(s) = k(s)N(s)$. Daí, $T''(s) = k(s)N'(s)$. Mas, sabemos que através de uma expansão ortogonal, podemos exprimir $N'(s)$ em termos de $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$. Sendo assim,

$$N'(s) = (N'(s) \bullet T(s))T(s) + (N'(s) \bullet N(s))N(s) + (N'(s) \bullet B(s))B(s).$$

Mas, vimos que N (s) é perpendicular a T(s) e B(s). Então, segundo o teorema 5,

$$N'(s) \bullet T(s) = -N(s) \bullet T'(s) = -N(s) \bullet k(s)N(s) = -k(s) \quad \text{e}$$
$$N'(s) \bullet B(s) = -N(s) \bullet B'(s) = -N(s) \bullet (-\tau(s)N(s)) = \tau(s).$$

Como $\|N(s)\| = 1$, então $N'(s) \bullet N(s) = 0$. Daí, podemos escrever que

$$N'(s) = -k(s).T(s) + \tau(s).B(s).$$

Então, $T''(s) = k(s)\left(-k(s).T(s) + \tau(s).B(s)\right) = -k(s)^2 T(s) + k(s)\tau(s)B(s)$.

Com efeito, e considerando que $k(s) = k_\beta(s(t)) = k(t)$ e que $\tau(s) = \tau_\beta(s(t)) = \tau(t)$ temos que:

$$\begin{aligned} f'(t) \times f''(t) &= \|f'(t)\|^3 \left(T(s) \times T'(s)\right)^4 \\ &= \|f'(t)\|^3 \left(T(s) \times k(t)N(s)\right) \\ &= \|f'(t)\|^3 k(t)B(s) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f'''(t) &= T''(s)\left(s'(t)\right)^3 + 3T'(s).\, s'(t)s''(t) + T(s)s'''(t) \\ &= \left(-k^2(t)T(s) + k(t)\tau(t)B(s)\right)\left(s'(t)\right)^3 + 3k(t)N(s).\, s'(t)s''(t) + T(s)s'''(t). \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} &\left(f'(t) \times f''(t)\right) \bullet f'''(t) = \\ &= \left(\|f'(t)\|^3 k(t)B(s)\right) \bullet \left[-k^2(t)T(s)\left(s'(t)\right)^3 + k(t)\tau(t)B(s)\left(s'(t)\right)^3 + 3k(t)N(s).s'(t)s''(t) + T(s)s'''(t)\right] \\ &= \|f'(t)\|^3 k(t)B(s) \bullet \left(-k^2(t)\right)T(s)\left(s'(t)\right)^3 + \|f'(t)\|^3 k(t)B(s) \bullet k(t)\tau(t)B(s)\left(s'(t)\right)^3 + \\ &+ \|f'(t)\|^3 k(t)B(s) \bullet 3k(t)N(s).\, s'(t)s''(t) + \|f'(t)\|^3 k(t)B(s) \bullet T(s)s'''(t) \\ &= \|f'(t)\|^3 k^2(t)\tau(t)\|f'(t)\|^3, \qquad \text{(pois, } s'(t) = \|f'(t)\|\text{)} \\ &= \|f'(t)\|^6 k^2(t)\tau(t). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\left(f'(t) \times f''(t)\right) \bullet f'''(t)}{\|f'(t) \times f''(t)\|^2} = \frac{\|f'(t)\|^6 k^2(t)\tau(t)}{\|f'(t)\|^6 k^2(t)} = \tau(t).$$

▲

[4] Por simplificação da escrita, vamos considerar ao longo da continuação da demonstração do teorema que: T(s), N(s) e B(s) correspondem a $T_\beta(s(t)),\ N_\beta(s(t))\ e\ B_\beta(s(t))$;
$T'(s)\ \ N'(s)\ e\ B'(s)$ correspondem a $T'_\beta(s(t)),\ N'_\beta(s(t))\ e\ B'_\beta(s(t))$

Portanto, em resumo podemos ver que, para curvas parametrizadas por comprimento de arco, $T'(s) = k(s)N(s)$, $B'(s) = -\tau(s)N(s)$ e $N'(s) = -k(s).T(s) + \tau(s).B(s)$. Daí, em conclusão temos:

Teorema 10. Seja $f : I \to \Re^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco, com curvatura $k(s) > 0$ e torção $\tau(s)$. Então, para cada $s \in I$, temos:

(1) $T'(s) = k(s)N(s)$

(2) $N'(s) = -k(s).T(s) + \tau(s).B(s)$

(3) $B'(s) = -\tau(s)N(s)$

Para a demonstração, como se viu anteriormente, $N(s) = \dfrac{T'(s)}{k(s)}$ então $T'(s) = k(s)N(s)$.

Para encontrar a segunda e terceira fórmula, vimos que através da expansão ortogonal, podemos exprimir $N'(s)$ em termos de $T(s)$, $N(s)$ e $B(s)$ e $B'(s)$ em termos de $T(s)$, $N(s)$ e $B(s)$ (expansão de $N'(s)$ ver teorema 9 e expansão de $B'(s)$ ver página 29).

As equações (1), (2), e (3) são chamados de **equações de Frenet** e podemos escrever essas equações sob a forma de uma matriz anti-simétrica, que exprime $T'(s)$, $N'(s)$, $B'(s)$ em termos de $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$.

$$\begin{pmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix}.$$

Já vimos, como determinar a curvatura e a torção para qualquer curvas de $\Re^3$, sem precisarmos de determinar uma sua reparametrização por comprimento de arco. Como será para o referencial de Frenet?

Considerando $f : I \to \Re^3$ uma curva regular, basta tomar a reparametrização β de f pelo comprimento de arco, escrevendo $f(t) = \beta(s(t))$ e tal como definimos a curvatura $k(t) = k_\beta(s(t))$ e $\tau(t) = \tau_\beta(s(t))$, vamos definir o referencial de Frenet, como sendo,

$$\begin{cases} T(t) = T_\beta(s(t)) \\ N(t) = N_\beta(s(t)). \\ B(t) = B_\beta(s(t)) \end{cases}$$

Sendo assim, temos:

Teorema 11. Seja f uma curva regular em $\Re^3$. Então

(1) $T(t) = \dfrac{f'(t)}{\| f'(t)\|}$

(2) $B(t) = \dfrac{f'(t)\times f''(t)}{\| f'(t)\times f''(t)\|}$.

Demonstração: (1) De $f(t) = \beta(s(t))$, temos que $f'(t) = \beta'(s(t))s'(t)$. Mas, sabemos que $s'(t) = \| f'(t)\|$ então,

$$f'(t) = T_\beta(s(t))\| f'(t)\|$$

$$\Leftrightarrow T_\beta(s(t)) = T(t) = \frac{f'(t)}{\| f'(t)\|}.$$

Para a demonstração de (2), vimos que:

$f'(t) = \beta'(s(t))s'(t) = T_\beta(s(t))s'(t)$ e

$f''(t) = T'_\beta(s(t)).s'(t).s'(t) + T_\beta(s(t)).s''(t) = T'_\beta(s(t)).s'(t)^2 + T_\beta(s(t)).s''(t)$

Então,

$$\begin{aligned} f'(t)\times f''(t) &= T_\beta(s(t))s'(t)\times\left(T'_\beta(s(t)).s'(t)^2 + T_\beta(s(t)).s''(t)\right) \\ &= T_\beta(s(t))s'(t)\times T'_\beta(s(t)).s'(t)^2 + T_\beta(s(t))s'(t)\times T_\beta(s(t)).s''(t) \\ &= (s'(t))^3.\ T_\beta(s(t))\times T'_\beta(s(t)) \\ &= \| f'(t)\|^3.T_\beta(s(t))\times k_\beta(s(t))N_\beta(s(t)), \\ &= \| f'(t)\|^3.k_\beta(s(t))B_\beta(s(t)) \\ &= \| f'(t)\|^3.k(t)\ B(t). \end{aligned}$$

Com efeito, temos que:

$$\| f'(t)\times f''(t)\| = \left\| \| f'(t)\|^3.k(t)\ B(t)\right\| = \| f'(t)\|^3.k(t)\ .$$

Logo,

$$\frac{f'(t)\times f''(t)}{\| f'(t)\times f''(t)\|} = \frac{\| f'(t)\|^3.k(t)\ B(t)}{\| f'(t)\|^3 k(t)} = B(t).$$

▲

Observação: O vector $N(t) = N_\beta(s(t))$ calcula-se através do produto vectorial $B(t)\times T(t)$.

De uma forma geral, como devemos calcular as derivadas $T'(t),\ N'(t)\ e\ B'(t)$?

Teorema 12. (equações de Frenet) Seja $f: I \to \Re^3$ uma curva regular, com curvatura k(t)>0. Então,

$$\begin{cases} T'(t) = k(t)v(t)N(t) \\ N'(t) = -k(t)v(t)T(t) + \tau(t)v(t)B(t) \\ B'(t) = -\tau(t)v(t)N(t) \end{cases}.$$

Demonstração: Seja *f(t)* uma curva regular em $\Re^3$. Então, podemos definir $T(t) = T_\beta(s(t))$, $N(t) = N_\beta(s(t))$ e $B(t) = B_\beta(s(t))$, sendo β é uma reparametrização por comprimento de arco de f. Então,

$$T'(t) = T'_\beta(s(t)).s'(t) = k_\beta(s(t))N_\beta(s(t))s'(t). \text{ Daí,}$$

$$T'(t) = k(t)v(t)N(t), \text{ onde } v(t) = s'(t) = \|f'(t)\|.$$

Para a segunda fórmula, vimos que $N(t) = N_\beta(s(t))$. Então, $N'(t) = N'_\beta(s(t)).s'(t)$ e vimos que, para curva parametrizada por comprimento de arco

$$N'(s) = N'_\beta(s(t)) = -k(t)T(t) + \tau(t)B(t).$$

Sendo assim, $N'(t) = (-k(t)T(t) + \tau(t)B(t))s'(t)$. Daí,

$$N'(t) = -k(t)v(t)T(t) + \tau(t)v(t)B(t).$$

Para $B'(t)$, vimos que $B(t) = B_\beta(s(t))$ e $B'(t) = B'_\beta(s(t)).s'(t) = -\tau(t)N(t)v(t)$. ▲

Em resumo, no caso geral as equações de Frenet tem a forma:

$$\begin{pmatrix} T'(t) \\ N'(t) \\ B'(t) \end{pmatrix} = v(t)\begin{pmatrix} 0 & k(t) & 0 \\ -k(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T(t) \\ N(t) \\ B(t) \end{pmatrix}.$$

Agora, considerando novamente o exemplo da pág. 19 para a hélice $\beta(s) = \left(a\cos\frac{s}{c},\ a\,sen\frac{s}{c},\ \frac{bs}{c}\right)$, onde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, podemos mostrar através de um simples cálculo, que o referencial de Frenet para a curva β é:

$$\begin{cases} T(s) = \left(-\dfrac{a}{c}\; sen\dfrac{s}{c}, \quad \dfrac{a}{c}\cos\dfrac{s}{c}, \quad \dfrac{b}{c} \right) \\ N(s) = \left(-\cos\dfrac{s}{c}, \quad -sen\dfrac{s}{c}, \quad 0 \right) \\ B(s) = \left(\dfrac{b}{c}\; sen\dfrac{s}{c}, \quad -\dfrac{b}{c}\cos\dfrac{s}{c}, \quad \dfrac{a}{c} \right) \end{cases}$$

e que $\tau(s) = \dfrac{b}{a^2 + b^2}$.

Como vimos para este exemplo a curvatura $k(s) = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$. Portanto, podemos constatar que, a curvatura é constante positiva e a torção é também constante não nula. Mas, se o parâmetro b for zero, como vimos anteriormente, a hélice reduz-se a uma circunferência de raio igual a a, cuja curvatura é $\dfrac{1}{a}$ e consequentemente, a torção é nula. Sendo assim, temos:

Teorema 13. Seja $\beta : I \to \Re^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco, com curvatura *k(s)>0*. Então β é uma curva plana se e só se $\tau(s) = 0$, para todo $s \in I$.

Demonstração: Suponhamos que β é uma curva plana. Então, existem pontos $\vec{p}$ *e* $\vec{q}$ pertencente ao plano em $\Re^3$, tal que, $(\beta(s) - \vec{p}) \bullet \vec{q} = 0, \quad \forall s \in I$. Agora, derivando esta equação em s, obtemos que:

$$(\beta(s) - \vec{p})' \bullet \vec{q} \;+\; (\beta(s) - \vec{p}) \bullet \vec{q}\,' = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta'(s) \bullet \vec{q} = 0$$

$\Leftrightarrow T(s) \bullet \vec{q} = 0$, daí $\vec{q}$ é perpendicular a $T(s), \quad \forall s \in I$. Derivando, novamente esta última equação em s, obtemos que:

$T'(s) \bullet \vec{q} = 0 \Leftrightarrow k(s)N(s) \bullet \vec{q} = 0$. Então, $N(s) \bullet \vec{q} = 0$ e consequentemente $\vec{q}$ é também perpendicular a $N(s), \quad \forall s \in I$.

Logo, $\vec{q}$ é paralelo a $B(s)$ porque $B(s)$ é perpendicular a $T(s)$ e a $N(s)$. Mas, como $\| B(s) \| = 1$, então $B(s) = \pm \dfrac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|}, \quad \forall s \in I$, daí $B(s)$ é constante. Portanto, $B'(s) = 0$ e segundo o teorema 10, vimos que, $B'(s) = -\tau(s)N(s)$. Logo, podemos concluir que $\tau(s) = 0, \quad \forall s \in I$.

Reciprocamente, suponhamos que $\tau(s)=0$. Portanto, $B'(s)=0$ e consequentemente $B(s)$ é constante. Mas, na implicação contrária, concluímos que $\beta(s)$ está contida no plano perpendicular a $B(s)$, que passa em $\beta(s_0),\ \ s_0 \in I$. Para provar esta afirmação, vamos verificar se todos os outros pontos estão contidos no plano $\left(\beta(s)-\beta(s_0)\right)\bullet B(s)=0, \quad \forall s \in I$.

Sendo assim, vamos definir uma função f de valor real, como sendo,

$$f(s)=\left(\beta(s)-\beta(s_0)\right)\bullet B(s), \quad \forall s \in I. \text{ Assim,}$$

$$f'(s)=\left(\beta(s)-\beta(s_0)\right)'\bullet B(s),+\left(\beta(s)-\beta(s_0)\right)\bullet B'(s)$$

$$=\beta'(s)\bullet B(s)=T(s)\bullet B(s)=0, \quad \forall s \in I.$$ Daí, como $f'(s)=0$, então $f(s)$ é uma constante. Mas, por outro lado em s_0, f toma o valor $f(s_0)=\left(\beta(s_0)-\beta(s_0)\right)\bullet B(s)=0$. Logo, esta constante é zero, ou seja, $f(s)=0$ e assim, concluímos que, $\left(\beta(s)-\beta(s_0)\right)\bullet B(s)=0, \quad \forall s \in I$, o que mostra que β está contida num plano de $\Re^3$. ▲

Portanto, anteriormente, vimos que para *b = 0* , temos uma circunferência de raio *a*, com curvatura $\frac{1}{a}$ e torção zero. Mas, a fórmula dada para normal, mostra-nos que para uma circunferência, $N(s)$ aponta sempre para o centro. Neste caso, para cada $s \in I$, está bem definido o centro de curvatura de β em s, dado por:

$$C(s)=\beta(s)+\frac{1}{k(s)}N(s)$$

sendo $N(s)$ campo normal unitário de β. Sendo assim, temos:

Teorema 14. Se $\beta : I \rightarrow \Re^3$, for uma curva parametrizada por comprimento de arco, com curvatura k(s) > 0 e torção $\tau(s)=0$, então β é parte de uma circunferência de raio $\frac{1}{k(s)}$.

Demonstração: Como $\tau(s)=0$, então β é uma curva plana. O que devemos agora provar é que qualquer ponto de β está a uma distância $\frac{1}{k(s)}$, num ponto fixo, que será o centro da circunferência. Sendo assim, consideremos os pontos

$$C(s) = \beta(s) + \frac{1}{k(s)} N(s).$$

Como $C'(s) = \beta'(s) + \frac{1}{k(s)} N'(s) \;= T(s) + \frac{1}{k(s)}\left(-k(s)T(s) + \tau(s)B(s)\right) =$

$= T(s) - T(s) = 0$, então $C(s) = C_0$ é constante para todo $s \in I$. Daí,

$$C_0 = \beta(s) + \frac{1}{k(s)} N(s) \Leftrightarrow C_0 - \beta(s) = \frac{1}{k(s)} N(s) \text{ e para cada } s \in I,$$

$\|C_0 - \beta(s)\| = \left\|\frac{1}{k(s)} N(s)\right\| = \frac{1}{k(s)} = d\left(C_0, \beta(s)\right)$[5] o que mostra que todos os pontos da curva de β estão contidos na circunferência de centro C_0 e raio $\frac{1}{k(s)}$.

▲

Dando a sequência ao tratamento deste conteúdo, podemos ver que, a curvatura e a torção determinam completamente a forma da curva. Sendo assim, segue-se:

Definição 16. Uma curva regular $f : I \to \Re^3$ é dita uma hélice cilíndrica se existir um vector $\vec{u}$ unitário, que faz um ângulo constante θ com o vector tangente unitário T(s) de f, ou seja, $T(s) \bullet \vec{u} = \cos\theta, \quad \forall s \in I$

Portanto, uma vez que esta condição é independente de parametrizações, então vamos supor que a curva f está parametrizada pelo comprimento de arco, com $k(s) > 0, \quad \forall s \in I$.

Teorema 15. Uma curva $f : I \to \Re^3$, parametrizada pelo comprimento de arco e com k(s) > 0 é uma hélice cilíndrica se , e somente se o quociente $\frac{\tau(s)}{k(s)}$ é constante.

Demonstração: Se f é uma hélice cilíndrica, então $T(s) \bullet \vec{u} = \cos\theta$ é constante. Então, derivando esta equação, obtemos que:

---

[5] Distância de C_0 até $\beta(s)$

$T'(s)\bullet\vec{u}=0 \Leftrightarrow k(s)N(s)\bullet\vec{u}=0 \Leftrightarrow N(s)\bullet\vec{u}=0$. Então, para cada $s\in I$, $\vec{u}$ está contido no plano determinado por $T(s)$ *e* $B(s)$. Daí, através de uma expansão ortogonal, podemos escrever o vector $\vec{u}$ unitário, como sendo,

$$\vec{u}=(\cos\theta)T(s)+(sen\theta)B(s).$$

Agora, derivando esta última equação, obtemos que:

$0=\cos\theta\,.T'(s)+sen\theta.B'(s)$ e segundo o teorema10, vem que:

$0=\cos\theta\,.k(s)\;N(s)+sen\theta.(-\tau(s)\,.\,N(s))$

$\Leftrightarrow 0=(k(s)\cos\theta-\tau(s)\;sen\theta)\,N(s)\Leftrightarrow k(s)\cos\theta-\tau(s)\;sen\theta=0\Leftrightarrow k(s)\cos\theta=\tau(s)\;sen\theta$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos\theta}{sen\theta}=\dfrac{\tau(s)}{k(s)}$. Logo, $\dfrac{\tau(s)}{k(s)}=\cot g\theta$ que é um valor constante.

Reciprocamente, se $\dfrac{\tau(s)}{k(s)}$ é constante, então podemos escolher um ângulo θ, de modo que $\cot g\theta=\dfrac{\tau(s)}{k(s)}$. Sendo assim, vamos definir o campo vectorial U(s) unitário, pela equação $U(s)=\cos\theta\;T(s)+sen\theta\;B(s)$. Derivando U(s) obtemos que:

$$U'(s)=\cos\theta\,.T'(s)+sen\theta.B'(s)$$
$$\Leftrightarrow 0=(k(s)\cos\theta.-\tau(s)\;sen\theta)N(s).$$

Como $\dfrac{\tau(s)}{k(s)}$ é constante, então $U'(s)=0,\quad \forall s\in I$. Portanto, U(s) é constante e unitário cujo valor designamos ainda por $\vec{u}$. Daí, $T(s)\bullet\vec{u}=\cos\theta$. Logo f é uma hélice cilíndrica.

▲

Com isto, terminamos a abordagem teórica do estudo das curvas em $\Re^3$, que se propõe neste trabalho. No próximo capítulo, vamos dedicar apenas a aplicação prática dos conceitos abordado ao longo do capítulo I.

CAPÍTULO II

Aplicações

2.1 Exercícios resolvidos

1. Considere a curva $f:\Re \to \Re^3$ definida por $f(t)=\left(f_1(t),\ f_2(t),\ f_3(t)\right)$ sendo

$$f_1(t)=t^2, \qquad f_2(t)=\begin{cases} 0 & ,\ se\ \ t\le 0 \\ t^3\, sen\dfrac{1}{t}, & se\ \ t>0 \end{cases} \qquad e \qquad f_3(t)=0$$

Prove que f é uma curva de classe C^1 não regular.

Resolução:

Tendo em conta definição 1, primeiramente, vamos provar que a primeira derivada existe e é contínua.

Deste modo, temos que:

$f'_1(t)=2t$, existe e é contínua;

Como domínio da função $f_2(t)$ é igual a $\Re$, então podemos constatar que:

Para t < 0, $f'_2(t)=0$

Para t > 0, $$f'_2(t)=\frac{d}{dt}\left(t^3\, sen\frac{1}{t}\right)=3t^2.sen\frac{1}{t}+t^3\left(\frac{1}{t}\right)'\cos\frac{1}{t}=$$

$$=3t^2.sen\frac{1}{t}-t\cos\frac{1}{t}$$

Agora, só resta estudar a derivada da função $f_2(t)$ no ponto t = 0, para averiguar a existência ou não da derivada da função $f_2(t)$. Para tal, temos que calcular as derivadas laterais. Sendo assim,

$$f_2'(0^+) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^3.sen\frac{1}{t}-0}{t} = \lim_{t\to 0^+} t^2 sen\frac{1}{t} = \lim_{t\to 0^+} t\,\frac{sen\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}} =$$

$$= \lim_{t\to 0^+} t.\lim_{t\to 0^+} \frac{sen\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}} = 0\times 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad f_2'(0^-) = \lim_{t\to 0^-} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0^-} \frac{0}{t} = 0.$$

Logo, $\exists f'_2(0) = 0$ porque $f_2'(0^-) = f_2'(0^+) = 0$. Daí, podemos concluir que, $f_2'(t)$ existe e é contínua.

$f_3(t) = 0$, então $f_3'(t) = 0$.

Assim, podemos concluir que existe e é contínua

$$f'(t) = \left(2t \quad ; \quad \begin{cases} 0\,, & se \quad t \le 0 \\ 3t^2 sen\frac{1}{t} - t\cos\frac{1}{t}\,, & se \quad t > 0 \end{cases} \quad ; \quad 0 \right)$$

Portanto, podemos concluir que f (t) é de classe C^1 porque a primeira derivada existe e é contínua, mas não é regular[6] , uma vez que, $\forall t \in \Re$, $\exists_{t=0} \in \Re$: $f'(t) = (0,0,0)$.

2. Seja $f : \Re \to \Re^3$ uma curva definida por $f(t) = \left(e^t \cos t,\ e^t\, sent,\ 0\right)$.

Prove que os vectores $f(t)$ e $f'(t)$ formam sempre o mesmo ângulo.

Resolução:

Sabemos que $\cos\left(f(t)\wedge f'(t)\right) = \dfrac{f(t)\bullet f'(t)}{\|f(t)\|\,\|f'(t)\|}$. Então,

$$f'(t) = \left(e^t\cos t - e^t sent;\ e^t\, sen\, t + e^t \cos t\,;\, 0\right),$$

$$\|f'(t)\| = \sqrt{\left(e^t(\cos t - sent)\right)^2 + \left(e^t(sen\,t + \cos\,t)\right)^2}$$

$$= \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t\ - 2\cos t.sent + sen^2 t) + e^{2t}(sen^2 t + 2sent.\cos t + \cos^2 t)}$$

$$= \sqrt{e^{2t}(1\ - 2\cos t.sent + 1 + 2sent.\cos t)}$$

$$= \sqrt{2e^{2t}} \ = \sqrt{2}\,e^t,$$

$$\|f(t)\| = \sqrt{e^{2t}\cos^2 t\ + e^{2t} sen^2 t} = e^t$$

e

[6] Ver definição 4.

$$f(t) \bullet f'(t) = \left(e^t \cos t,\ e^t\, sent,\ 0\right) \bullet \left(e^t \cos t - e^t sent,\ e^t\, sen\, t + e^t \cos t,\ 0\right)$$

$$= e^{2t} \cos^2 t - e^{2t} \cos t.sen\, t + e^{2t} sen^2 t + e^{2t} \cos t.sent$$

$$= e^{2t} (\cos^2 t + sen^2 t) = e^{2t}.$$

Daí,

$\cos\left(f(t)\wedge f'(t)\right) = \dfrac{f(t) \bullet f'(t)}{\| f(t) \| \| f'(t) \|} = \dfrac{e^{2t}}{e^t.\sqrt{2}\, e^t} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Logo, $f(t)$ e $f'(t)$ formam sempre o mesmo ângulo.

3. Considere Y como sendo, um campo vectorial sobre a hélice

$$f(t) = \left(\cos t,\ sent,\ t\right).$$

Em cada ponto dos seguintes casos, exprima Y na forma $\sum_{i=1}^{3} Y_i U_i$.

a) Y (t) é o vector desde $f(t)$ até a origem de $\Re^3$.

Resolução:

Se $f(t)$ por definição é o vector posição que vai da origem até o ponto $f(t)$, então o vector que vai do ponto $f(t)$ até origem de $\Re^3$ é dado por - $f(t)$. Logo, o campo vectorial Y(t) é dado por:

$$Y(t) = -f(t) = \left(-\cos t,\ -sent,\ -t\right).$$

Assim, $Y(t) = -\cos t U_1 - sent U_2 - t U_3$.

b) Y(t) é o vector que possui comprimento unitário e é ortogonal tanto a $f'(t)$ como a $f''(t)$.

Resolução:

Consideremos $Y(t) = \left(Y_1(t),\ Y_2(t),\ Y_3(t)\right)$. Pelo enunciado do problema $\|Y(t)\| = 1$ $\wedge$ $Y(t) \perp f'(t)$ $\wedge$ $Y(t) \perp f''(t)$. Então,

$$\begin{cases} Y(t) \bullet f'(t) = 0 \\ Y(t) \bullet f''(t) = 0 \\ \|Y(t)\| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(Y_1,\ Y_2,\ Y_3\right) \bullet \left(-sen\, t,\ \cos t,\ 1\right) = 0 \\ \left(Y_1,\ Y_2,\ Y_3\right) \bullet \left(-\cos t,\ -sen\, t,\ 0\right) = 0 \\ \sqrt{Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -Y_1.sent + Y_2 \cos t + Y_3 = 0 & (\times sent) \\ -Y_1.\cos t - Y_2\; sen\, t \qquad = 0 & (\times \cos t) \\ \rule{3cm}{0.4pt} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -Y_1.sen^2 t + Y_2 \cos t.\, sen\, t + Y_3 sen\, t = 0 \\ -Y_1.\cos^2 t - Y_2 \cos t.\, sen\, t \qquad\qquad = 0 \\ \rule{4cm}{0.4pt} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -Y_1.sent \; + \; Y_2 \cos t \; + \; Y_3 = 0 \\ -Y_1 \qquad\qquad\qquad + Y_3\; sen\, t \; = 0 \\ \rule{4cm}{0.4pt} \end{cases} \Leftrightarrow (\times sen\, t) \begin{cases} -Y_1.sent \; + \; Y_2 \cos t \; + \; Y_3 = 0 \\ \quad Y_1 \qquad\qquad\qquad = Y_3\; sen\, t \\ \rule{3.5cm}{0.4pt} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -Y_1.sent \; + \; Y_2 \cos t \; + \; Y_3 = 0 \\ \; Y_1\, sen\, t \qquad\qquad\qquad = Y_3\; sen^2\, t \\ \rule{4cm}{0.4pt} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -Y_1.sent \; + \; Y_2 \cos t \; + \; Y_3 = 0 \\ \qquad\qquad Y_2 \cos t + Y_3 \; = Y_3\; sen^2\, t \\ \rule{3.5cm}{0.4pt} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rule{1.5cm}{0.4pt} \\ Y_2 \cos t \; = Y_3\; sen^2\, t - Y_3 \\ \rule{1.5cm}{0.4pt} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rule{1.5cm}{0.4pt} \\ Y_2 \cos t \; = -Y_3\left(1 - sen^2\, t\right) \\ \rule{1.5cm}{0.4pt} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rule{1.5cm}{0.4pt} \\ Y_2 \cos t \; = -Y_3 \cos^2 t \\ \rule{1.5cm}{0.4pt} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y_1 = Y_3 sent \\ Y_2 = -Y_3 \cos t \\ \sqrt{Y_1^{\,2} + Y_2^{\,2} + Y_3^{\,2}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rule{1.5cm}{0.4pt} \\ \rule{1.5cm}{0.4pt} \\ \sqrt{(Y_3 sent)^2 + (-Y_3 \cos t)^2 + Y_3^{\,2}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rule{1.5cm}{0.4pt} \\ \rule{1.5cm}{0.4pt} \\ \sqrt{Y_3^{\,2} + Y_3^{\,2}} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rule{1.5cm}{0.4pt} \\ \rule{1.5cm}{0.4pt} \\ 2Y_3^{\,2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rule{2cm}{0.4pt} \\ \rule{2cm}{0.4pt} \\ Y_3 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \vee \quad Y_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Daí,

$$Y_1 = -\frac{sent}{\sqrt{2}} \quad \vee \quad Y_1 = \frac{sent}{\sqrt{2}}$$

$$Y_2 = \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \quad \vee \quad Y_2 = -\frac{\cos t}{\sqrt{2}}$$

$$Y_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \vee \quad Y_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Logo,

$$Y(t) = \left(-\frac{sen\, t}{\sqrt{2}},\ \frac{\cos t}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ ou } Y(t) = \left(\frac{sen\, t}{\sqrt{2}},\ -\frac{\cos t}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Sendo assim,

$$Y(t) = -\frac{sen\, t}{\sqrt{2}} U_1 + \frac{\cos t}{\sqrt{2}} U_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} U_3 \quad \text{ou} \quad Y(t) = \frac{sen\, t}{\sqrt{2}} U_1 - \frac{\cos t}{\sqrt{2}} U_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} U_3.$$

4. Considere a curva f definida por: $f:\Re\to\Re^2,\quad f(t)=\left(e^{-t}\cos t,\ e^{-t}\,sen\,t\right).$

   a) Verifique se a curva f está parametrizada por comprimento de arco.

   Resolução:

Se f está parametrizada pelo comprimento de arco, então $\|f'(t)\|=1$. Então,

$$f'(t)=\left(-e^{-t}\cos t-e^{-t}sent;\ -e^{-t}\,sen\,t+e^{-t}\cos t\ \right),$$

$$\|f'(t)\|=\sqrt{\left(-e^{-t}(\cos t+sent)\right)^2+\left(-e^{-t}(sen\,t-\cos t)\right)^2}$$

$$=\sqrt{e^{-2t}(\cos^2 t\ +2\cos t.sent+sen^2 t)+e^{-2t}(sen^2 t-2sent.\cos t+\cos^2 t)}$$

$$=\sqrt{e^{-2t}(1\ +2\cos t.sent+1-2sent.\cos t)}$$

$$=\sqrt{2e^{-2t}}\ \ =\sqrt{2}\,e^{-t}.$$

Como $\|f(t)\|=\sqrt{2}\,e^{-t}\neq 1,\forall t\in\Re$, logo, a curva f não está parametrizada por comprimento de arco.

   b) Mostre que, quando $t\to+\infty$, o comprimento de arco, baseado em $t_0=0$, da curva de f é igual a $\sqrt{2}$.

   Resolução:

Vimos na definição 7 que, o comprimento de arco de uma curva é definida por

$s(t)=\int_{t_0}^{t} f(u)du$. Então, $s(t)=\int_{t_0}^{t} f(u)du=\int_{0}^{t}\sqrt{2}.e^{-u}du=\sqrt{2}\left[-e^{-u}\right]_0^t=\sqrt{2}\left(-e^{-t}+1\right).$

Portanto, quando $t\to+\infty$, $\lim_{t\to+\infty}s(t)=\lim_{t\to+\infty}\sqrt{2}\left(-e^{-t}+1\right)=\sqrt{2}\left(-e^{-\infty}+1\right)=\sqrt{2}$, o que pretendíamos demonstrar.

5. Considere a curva f definida por:

$$f:\Re\to\Re^3,\quad f(s)=\left(\frac{5}{13}\cos s,\ \frac{18}{13}-sen\,s\ ,\ \ -\frac{12}{13}\cos s\right)$$

   a) Mostre que a curva f está parametrizada por comprimento de arco.

   Resolução:

f está parametrizada pelo comprimento de arco. Então, $\|f'(s)\| = 1$, para todo $s \in \Re$.

Assim, $f'(s) = \left(-\frac{5}{13} sen\ s, -\cos\ s\ ,\ \frac{12}{13} sen\ s \right)$ e

$$\|f'(s)\| = \sqrt{\frac{25}{169} sen^2 s + \cos^2 s + \frac{144}{169} sen^2 s} = 1, \text{ para todo } s \in \Re.$$

b) Calcule o referencial de Frenet, a curvatura e a torção de f.

Resolução:

Na definição 14, vimos que o referencial $\{T(s), N(s), B(s)\}$ é chamado de campo referencial de Frenet. Sendo assim, e tendo em conta que, a curva f está parametrizada por comprimento de arco, então segundo a definição 12, temos que:

$$T(s) = f'(s), \qquad N(s) = \frac{f''(s)}{\|f''(s)\|} \qquad \text{e} \qquad B(s) = T(s) \times N(s). \text{ Assim,}$$

$$T(s) = \left(-\frac{5}{13} sen\ s, -\cos\ s\ ,\ \frac{12}{13} sen\ s \right).$$

$$f''(s) = \left(-\frac{5}{13} \cos\ s,\ sen\ s\ ,\ \frac{12}{13} \cos\ s \right)$$

$$\|f''(s)\| = \sqrt{\frac{25}{169} \cos^2 s + sen^2 s + \frac{144}{169} \cos^2 s} = 1.$$

Daí,

$$N(s) = \left(-\frac{5}{13} \cos\ s,\ sen\ s\ ,\ \frac{12}{13} \cos\ s \right) \quad \text{e}$$

$$B(s) = T(s) \times N(s) = \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ -\frac{5}{13} sen\ s & -\cos s & \frac{12}{13} sen\, s \\ -\frac{5}{13} \cos s & sen\, s & \frac{12}{13} \cos s \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{12}{13} \cos^2 s - \frac{12}{13} sen^2 s,\quad \frac{60}{169} sen\ s.\cos\ s - \frac{60}{169} sen\ s.\cos\ s,\quad -\frac{5}{13} sen^2 s - \frac{5}{13} \cos^2 s \right)$$

$$= \left(-\frac{12}{13},\ 0,\ -\frac{5}{13} \right).$$

Assim, o referencial de Frenet é:

$$T(s) = \left(-\frac{5}{13} sen\ s, -\cos\ s\ ,\ \frac{12}{13} sen\ s \right)$$

$$N(s) = \left(-\frac{5}{13} \cos\ s, sen\ s\ ,\ \frac{12}{13} \cos\ s \right)$$

$$B(s) = \left(-\frac{12}{13},\ 0\ ,\ -\frac{5}{13} \right).$$

No que tange a curvatura, vimos que, $k(s) = \left\| f''(s) \right\|$ (definição 13.),logo *k(s)*=1.

No que diz respeito a torção, vimos, segundo o teorema 10, que $B'(s) = -\tau(s)N(s)$. Mas, $B(s) = \left(-\frac{12}{13},\ 0\ ,\ -\frac{5}{13} \right)$ é constante. Logo, $B'(s) = 0$ e consequentemente $\tau(s) = 0$.

c) Justifique a seguinte afirmação:

“ **A curva f trata-se de uma curva plana.**”

A curva f é, de facto, uma curva plana porque segundo o teorema 13, qualquer curva parametrizada por comprimento de arco com torção igual a zero, trata- de uma curva plana.

6. Seja $f : I \to \Re^3$ uma curva definida por $f(t) = \left(t,\ sent,\ e^t \right)$. Prove que $\beta : \Re^+ \to \Re^3$ dada por $\beta(t) = \left(\ln t,\ sen(\ln t),\ t \right)$é uma reparametrização de f.

Resolução:

Tendo em conta a definição 10, β é uma reparametrização de f se existir uma mudança de parâmetro λ, tal que, $\beta(t) = \left(f \circ \lambda \right)(t)$. Então,

$$\beta(t) = f\left(\lambda(t)\right) \Leftrightarrow \left(\ln t,\ sen(\ln t),\ t\ \right) = \left(\lambda(t),\ sen\ \lambda(t),\ e^{\lambda(t)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln t = \lambda(t) \\ sen(\ln t) = sen\ \lambda(t) \\ t = e^{\lambda(t)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda(t) = \ln t \\ \lambda(t) = \ln t \\ \lambda(t) = \ln t \end{cases}.$$

Agora, só nos resta verificar se $\lambda(t) = \ln t$ é uma mudança de parâmetro. Portanto, $\lambda(t)$ será uma mudança de parâmetro, bem como a sua inversa, se $\lambda(t)$ é bijectiva e $\lambda'(t) \neq 0, \quad \forall t \in \Re^+$.

$\lambda(t)$ é bijectiva se e somente se $\lambda(t)$ é injectiva e sobrejectiva simultaneamente. Sendo assim,

$\ln t_1 = \ln t_2 \Rightarrow t_1 = t_2$. Logo, $\lambda(t)$ é injectiva porque $\forall t_1, t_2 \in \Re^+ : t_1 = t_2 \Rightarrow \lambda(t_1) = \lambda(t_2)$.

Agora, $\lambda : \Re^+ \rightarrow \Re$ é sobrejectiva se e só se $\forall y \in \Re, \ \exists t \in \Re^+ : y = \lambda(t)$. Sendo assim, $y = \lambda(t) \Leftrightarrow y = \ln t \Leftrightarrow t = e^y$ ($y \in \Re$). Daí, para todo $y \in \Re$, existe um $t = e^y$. Logo, $\lambda(t)$ é sobrejectiva e consequentemente é bijectiva.

Como a função logarítmica é contínua e derivável em todo o seu domínio, então $\lambda(t)$ é de classe C^k. Daí,

$$\lambda'(t) = \frac{1}{t} \neq 0, \quad \forall t \in \Re^+.$$

Portanto, $\lambda(t)$ é uma mudança de parâmetro, e assim, podemos concluir que a curva β é uma reparametrização da curva f.

7. Mostre que a curvatura de uma circunferência definida por $f(t) = (r\cos t, \ r\,sent)$ é inversamente proporcional ao seu raio.

Resolução:

Como $f(t) = (r\cos t, \ r\,sent)$ é uma parametrização de circunferência de raio r, então vimos anteriormente que podemos definir a sua curvatura como sendo a curvatura de uma sua reparametrização. Sendo assim, temos:

$f'(t) = (-r\,sen\,t, \ r\cos t)$, $\|f'(t)\| = r$ e baseado em $t_0 = 0$, vem que:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|f'(u)\| du = \int_{0}^{t} r \, du = rt.$$

Mas, é fácil ver que $s(t)$ é uma mudança de parâmetro (ver exemplo da pág. 19)

Assim, $s(t) = rt$ então, $t = \dfrac{s}{r}$ e reparametrizando f por comprimento de arco, temos:

$$\beta(s) = \left(r\cos\frac{s}{r}, \ r\,sen\frac{s}{r} \right).$$

Com efeito, vimos que $k_f(t) = k_\beta(s(t)) = \|\beta''(s)\|$. Assim,

$$\beta'(s) = \left(-sen\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r} \right) \text{ e}$$

$$\beta''(s) = \left(-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}, -\frac{1}{r}sen\frac{s}{r} \right)$$

Daí, $k_f(t) = \sqrt{\left(-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r} \right)^2 + \left(-\frac{1}{r}sen\frac{s}{r} \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{r^2}} = \frac{1}{r}$.

Portanto, podemos concluir que, a curvatura de uma circunferência é inversamente proporcional ao seu raio.

8. Mostre que o traço da curva $f : \Re \to \Re^3$, definida por

$f(t) = \left(\frac{4}{5}\cos t, 1 - sen\ t\ ,\ \ -\frac{3}{5}\cos t \right)$ é uma circunferência de raio 1.

Resolução:

Tendo em conta o teorema 14, temos que mostrar que f está parametrizada por comprimento de arco, que sua curvatura é positiva e ainda mostrar que a torção é zero. Sendo assim,

$$f'(t) = \left(-\frac{4}{5}sen\, t,\ -\cos t,\ \frac{3}{5}sen\, t \right) \text{ e}$$

$\| f'(t) \| = \sqrt{\frac{16}{25}sen^2 t + \cos^2 t + \frac{9}{25}sen\ t} = \sqrt{sen^2 t + \cos^2 t} = 1$. Daí, para qualquer $t \in \Re$, a curva f está parametrizada por comprimento de arco. Por este motivo, vamos considerar que $f(t) = f(s)$.

Assim, $k(s) = \| f''(s) \| = \left\| \left(-\frac{4}{5}\cos s,\ \ sen\ s,\ \ \frac{3}{5}\cos s \right) \right\| = \sqrt{\frac{16}{25}\cos^2 s + sen^2 s + \frac{9}{25}\cos^2 s} = 1$.

Agora, só resta mostrar que a curva é plana, ou seja, que $\tau(s) = 0$. Então, tendo em conta o teorema 10, temos que:

$$B'(s) = -\tau(s).N(s).$$

Mas, $N(s) = \frac{T'(s)}{k(s)} = \frac{f''(s)}{k(s)} = \left(-\frac{4}{5}\cos s,\ \ sen\ s,\ \frac{3}{5}\cos s \right)$ e

$$B(s)=T(s)\times N(s)=\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ -\frac{4}{5}sen\ s & -\cos s & \frac{3}{5}sen\ s \\ -\frac{4}{5}\cos s & sen\ s & \frac{3}{5}\cos s \end{vmatrix}=$$

$$=\left(-\frac{3}{5}(\cos^2 s+sen^2 s),\ 0\ ,\ -\frac{4}{5}(\cos^2 s+sen^2 s)\right)=\left(-\frac{3}{5},\ 0\ ,\ -\frac{4}{5}\right).$$

Como $B(s)=\left(-\frac{3}{5},\ 0\ ,\ -\frac{4}{5}\right)$ é constante, então $B'(s)=0$ e consequentemente $\tau(s)=0$, para todo $s\in\Re$,pelo que a curva é plana.

Portanto, como a curvatura de f é igual a 1 e $\tau(s)=0$ então, o traço de f é uma circunferência de raio 1.

9. Sendo $f:\Re\to\Re$ uma função regular, considere a curva $g:\Re^+\to\Re^3$, definida por: $g(t)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^t sen\ f(u)du,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^t \cos\ f(u)du,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ t\right)$.

   Mostre que g é uma hélice cilíndrica.

Resolução:

Tendo em conta o teorema 15, vamos mostrar que $\frac{\tau(s)}{k(s)}$ é constante. Mas, primeiramente, vamos verificar se a curva g está ou não parametrizada por comprimento de arco. Então,

$$g'(t)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}sen\, f(t)\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\ f(t)\ ,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ \text{ e}$$

$$\|g'(t)\|=\sqrt{\frac{2}{4}sen^2 f(t)+\frac{2}{4}\cos^2 f(t)+\frac{2}{4}}=1.$$

Portanto, a curva g está parametrizada por comprimento de arco, pelo que, podemos considerar $g(t)=g(s)$. Sendo assim, vimos na definição 13 que $k(s)=\|g''(s)\|$ e segundo o teorema 10, também, vimos que $B'(s)=-\tau(s)N(s)$. Então, temos que:

$$g'(s)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}sen\, f(s)\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\ f(s)\ ,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=T(s)$$

$$g''(s)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}f'(s)\cos f(s)\,,\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}f'(s)sen\, f(s)\,,\quad 0\right)\ \text{e}$$

$$k(s)=\|g''(s)\|=\sqrt{\frac{2}{4}\left(f'(s)\right)^2\cos^2 f(s)+\frac{2}{4}\left(f'(s)\right)^2 sen^2 f(s)}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{4}\left(f'(s)\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}f'(s)\text{. Assim,}$$

$$k(s)=\frac{\sqrt{2}}{2}f'(s)$$

Agora, para calcular $\tau(s)$, temos que determinar $N(s)$ e $B'(s)$. Sendo assim, temos:

$$N(s)=\frac{g''(s)}{\|g''(s)\|}=\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}f'(s)\cos f(s)\,,\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}f'(s)sen\, f(s)\,,\quad 0\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}f'(s)}$$

$$=\left(\cos f(s)\,,\ -sen\, f(s)\,,\ 0\right).$$

$$B(s)=T(s)\times N(s)=\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}sen\ f(s) & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos f(s) & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos f(s) & -sen\, f(s) & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}sen\, f(s),\quad \frac{\sqrt{2}}{2}\cos f(s),\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}sen^2 f(s)-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos^2 f(s)\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}sen\, f(s),\quad \frac{\sqrt{2}}{2}\cos f(s),\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Então,

$$B'(s)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}f'(s)\cos f(s),\ -\frac{\sqrt{2}}{2}f'(s)sen\, f(s),\ 0\right)$$

Daí,

$$B'(s)=-\tau(s)N(s)$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{2}}{2}f'(s)\cos f(s),\ -\frac{\sqrt{2}}{2}f'(s)sen\, f(s),\ 0\right)=-\tau(s)\left(\cos f(s)\,,\ -sen\, f(s)\,,\ 0\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{2}}{2}f'(s)\cos f(s),\ -\frac{\sqrt{2}}{2}f'(s)sen\, f(s),\ 0\right)=\left(-\tau(s)\cos f(s)\,,\tau(s)sen\, f(s)\,,\ 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} f'(s)\cos f(s) = -\tau(s)\cos f(s) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} f'(s) sen\, f(s) = \tau(s) sen\, f(s) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tau(s) = -\frac{\sqrt{2}}{2} f'(s) \\ \tau(s) = -\frac{\sqrt{2}}{2} f'(s) \end{cases}$$

Logo, $\tau(s) = -\frac{\sqrt{2}}{2} f'(s)$.

Finalmente,

$$\frac{\tau(s)}{k(s)} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} f'(s)}{\frac{\sqrt{2}}{2} f'(s)} = -1,$$ o que mostra, segundo teorema 15, que a curva g é, de facto, uma hélice cilíndrica.

Assim, damos por terminar a resolução dos exercícios.

2.2 Exercícios propostos

1. Considere $a, b \in \Re$ e $f : \Re \to \Re^3$ a curva definida por $f(t) = \left(at\ , bt^2\ , t^3\right)$. Determine os valores de a e b para os quais f é regular.

2. Dada a curva $f : \Re \to \Re^3$ definida por: $f(t) = \left(e^t \cos t,\ e^t sen\, t,\ a\right)$.

Indique a sua classe e diga se é uma curva regular.

3. Seja $f : \Re \to \Re^3$ definida por: $f(t) = \left(r\cos t,\ r\, sen\, t,\ ht\right)$, com r > 0.

Prove que $f'(t)\ e\ \left(0,0,1\right)$ formam sempre o mesmo ângulo.

4. Considere a curva em $\Re^3$ parametrizada por $\alpha(t) = \left(3t,\ \cos 4t,\ sen 4t\right)$ para $t \in \Re$.

Calcule:

a) o vector velocidade e a celeridade de f.

b) o comprimento de arco da curva, baseado em $t_0 = 0$.

c) a reparametrização da curva f pelo comprimento de arco, baseado em $t_0 = 0$.

d) a celeridade da reparametrização de f.

e) o referencial de Frenet, a curvatura e a torção da reparametrização de f e determine os respectivos valores para s = 5.

f) o referencial de Frenet, a curvatura e a torção da curva inicial e determine os respectivos valores para t = 1.

g) Compare os valores e proponha uma explicação.

5. Seja $\lambda :]0\,,\,+\infty[\to]0\,,\,1[$ definida por $\lambda(t) = \dfrac{t^2}{t^2+1}$.

Prove que λ é uma mudança de parâmetro.

6. Considere a curva $f : \Re \to \Re^3$, definida por: $f(t) = \left(3t - t^3,\; 3t^2\;,\; 3t + t^3\right)$.

Mostre que $k(t) = \tau(t)$.

7. Se a equação paramétrica de f é definida por $f(s) = \left(x(s), y(s), z(s)\right)$ então, mostre que o raio da curvatura da curva é dado por:

$$\rho = \left[\left(\frac{d^2(x)}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2(y)}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2(z)}{ds^2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

8. Considere uma curva plana definida por: $r(s) = \left(x(s), y(s), 0\right)$ com curvatura $k(s) > 0$.

Mostre que $\tau(s) = 0$.

9. Dada a curva $f : \Re \to \Re^3$, definida por $f(t) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t,\; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t,\; sent\right)$.

Mostre que a curva f, trata-se de uma curva plana.

Conclusão

Neste trabalho tentámos construir um conjunto de conhecimentos básicos sobre teoria de curvas em $\Re^3$, que de uma certa forma, nos permitem garantir que os objectivos preconizados aquando da escolha do tema «Estudo das curvas em $\Re^3$» foram concedidos.

Tentámos fazer abordagens simples e directas a cada conteúdo, seguindo sempre uma sequência ou raciocínio lógico do assunto em questão.

Sendo assim, segundo este trabalho, podemos constatar que o estudo das curvas em $\Re^3$ pressupõe de um pré-requisitos necessários de Cálculo porque como sabemos, de uma forma geral, a Geometria Diferencial estuda propriedades das curvas e superfícies usando as técnicas do Cálculo diferencial e integral.

Ao longo deste trabalho, averiguámos que o estudo de uma curva simplifica-se quando ela está parametrizada por comprimento de arco e que é importante conhecer que, qualquer curvas possui uma reparametrização por comprimento de arco, embora, às vezes, pode ser muito complicado ou mesmo impossível determinar explicitamente essa reparametrização.

Ainda, verificámos neste trabalho a importância da utilização do uso do campo referencial de Frenet, principalmente, quando estamos a exprimir as derivadas T', N' e B' em termos de T, N e B .

De uma forma geral, constatámos que o conhecimento das duas funções escalares, curvatura e torção, é fundamental no estudo das curvas porque, como vimos no decorrer deste trabalho, a curvatura e a torção determinam completamente a forma da curva.

Com isto, terminamos este trabalho sobre curvas em $\Re^3$ e o presente trabalho poderá servir como ponto de referência para a sua continuidade no tocante ao teorema fundamental das curvas, que deveria ser mencionado neste trabalho, mas que não foi possível, a aplicação de Gauss, a primeira e segunda fórmula fundamentais de superfícies em $\Re^3$. Ainda este trabalho poderá servir como referência para os estudantes mais curiosos que, porventura, queiram aprofundar certos temas, contribuindo assim para que o estudo e o ensino da Geometria Diferencial sejam bem sucedidos.

Bibliografia

Livros e artigos:

- Do Carmo, M., **Differential Geometry of Curves and Surfaces**. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-hall, 1976.

- Hilbert, D., **The Foundations of Geometry** (2nd ed.), tr. E. Townsend. Chicago: Open Court, 1921.

- Hilbert D., **Fundamentos da Geometria** (2ª edição Portuguesa, Tradução de Pilar Ribeiro, Silva Paulo, Francisco Oliveira, Paulino Fortes) Gradiva, Lisboa, 2003.

- Spivak, M., **A Comprehensive Introduction to Differential Geometry**, I, II, III, IV, V. Boston: Publish or Perish, 1975.

- Millman, Richard S. e Parker, George D. - **Elements of differential geometry;** Prentice-hall Inc.,Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1977.

- Craveiro de Carvalho, F.J. – **Nota sobre Geometria Diferencial de curvas em $\mathbf{R}^3$**, Universidade de Coimbra, 1987.

- Bronstein, L., Semendiaev K., - **Manual de Matemática para engenheiros e estudantes,** tradução para português**,** Editora Mir, Moscovo, 1º edição, 1979.

- Lipschutz, M. Martin, – **Theory and Problems of Differential Geometry,** Shaun's outline series, McGraw-Hill, 1969.

- O'Neill, Barret, **Elementary Differential Geometry**, 2ª Ed., Academic Press, 1997.
- Consulta ao site:

  http://www.mat.uc.pt/~picado/geomdif/